Дифференциальные уравнения на пространстве функций от распределений и их применения

Е.М. Бениаминов

1 Введение

В данной сатье представлен некоторый подход к рассмотрению обобщенных распределений и гладких функций от них. Идея этого подхода возникла довольно давно, в конце 70-х или начале 80-х годов, в связи с задачей моделирования поведения ансамбля одинаковых взаимодействующих диффузионных процессов при большом числе элементов в ансамбле. Естественно, что состояние каждого диффузионного процесса описывается некоторым распределением вероятностей, а состояние ансамбля нужно было определить как распределение вероятностей на распределениях вероятностей и это вызывало у меня затруднения.

Первое, что стало понятным — это необходимость определения наблюдаемых для ансамблей так, чтобы они годились для разных ансамблей в независимости от числа элементов в ансамбле. Для этого пришлось рассмотреть гладкие функции на распределениях и рассматривать распределения, которые имеют конечную аппроксимацию.

В такой модели, устремляя число элементов ансамбля к бесконечности, в пределе получалась непрерывная модель — аналог дифференциальных уравнений, но на функциях от распределений. То есть для модели конкретного ансамбля получался конечно же аналог разностного уравнения. Такое разностное уравнение трудно исследовать аналитическими методами из-за большого количества элементов. Однако полученное разностное уравнение приближается некоторым дифференциальным уравнением на распределениях, которое в некоторых случаях легче поддается исследованию. Полученные непрерывные модели иногда легче анализировать, чем исходные разностные уравнения.

С этими идеями я тогда обратился к известному математику профессору Рональду Львовичу Добрушину, но он тогда увлекался другими идеями, а я, наверное, не смог ясно все изложить, поэтому Р.Л. Добрушин холодно отнесся к моему порыву. В результате я оставил эти идеи на многие годы.

Я вспомнил об этих идеях уже только в 2000-ые годы, когда мы с Леонидом Олеговичем Шашкиным решили построить математическую модель процессов, возникающих в результате генетических алгоритмов. Здесь состояния определяются ансамблями слов, а переходы задаются вероятностями мутаций в отдельных словах или за счет случайных парных взаимодействий между словами. При этом задаются правила рождения и умирания слов в ансамбле. Генетические алгоритмы достаточно широко используются в приложениях, как эвристистические алгоритмы случайного поиска. Нам же хотелось теоретически исследовать асимптотику этих процессов, когда длина слов в ансамблях и число самих слов очень велико. В результате нам удалось построить дифференциальное уравнение на распределениях для этого процесса, но в решении его мы сильно не продвинулись, да и стало понятно, что защитить диссертацию на эту тему в ученом совете ВИНИТИ будет сложно. Поэтому мы оставили эту тему, и Л.О. Шашкин защитил кандидатскую диссертацию по другой теме.

Наконец, сейчас я решил вернуться к этой теме и зафиксировать то, что у нас накопилось за эти годы. Сподвигло меня к этому прочтение книги [1], которая написана коллективом авторов, в результате работы семинара профессора А.М. Виноградова в МГУ по дифференциальным уравнениям. Особое впечатление на меня произвело послесловие к этой книге. В 70-е годы я тоже посещал этот семинар, и он оказал на мои представления существенное влияние. Я всегда себя ощущал в долгу перед Александром Михайловичем и его семинаром, так как я посещал этот семинар, но не участвовал активно в его работе. Надеюсь, что этот текст будет моим посильным вкладом в труды семинара.

2 Определения распределений и функций на множестве распредлений

Пусть $M = \mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство; $C^\infty(M)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на M. В общем случае M может быть любым гладким многообразием или подмножеством в нем. Множество $C^\infty(M)$ можно рассматривать как алгебру, на которой действуют гладкие функции $f(x_1, ..., x_k) \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, как операции в том смысле, что для любых $\varphi_1, ..., \varphi_k \in C^\infty(M)$ результат операции $f(\varphi_1, ..., \varphi_k) \in C^\infty(M)$ и представляет собой композицию гладких функций. Как известно, композиция гладких функций является гладкой функцией.

Определение 1. *Семейство функций $\varphi_{s_1,...,s_k}(x_1, ..., x_n) \in C^\infty(M)$, для $(s_1, ..., s_k) \in S \subset \mathbb{R}^k$, называется гладким, если $\varphi_{s_1,...,s_k}(x_1, ..., x_n)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных $s_1, ..., s_k, x_1, ..., x_n \in S \times M$.*

В частном случае, когда $S = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — гладкое семейство $\varphi_s(x_1, ..., x_n)$, для $s \in S$, представляет собой последовательность гладких функций $\varphi_{1/n}$, поточечно сходящихся к функции φ_0 вместе со всеми своими производными.

Определение 2. *Распределением на пространстве M называются произвольная линейная функция $l : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, обладающая следующим свойством:*

для любого гладкого семейства функций $\varphi_{s_1,...,s_k}(x_1, ..., x_n) \in C^\infty(M)$, для $(s_1, ..., s_k) \in S \subset \mathbb{R}^k$ функция $\langle l, \varphi_{s_1,...,s_k} \rangle : S \to \mathbb{R}$, задающая значение l на фукциях семейства $\varphi_{s_1,...,s_k}$, является бесконечно дифференцируемой на множестве $S \subset \mathbb{R}^k$.

Примерами распределений являются распределения Дирака $\delta_{\bar{x}^0}$, для любого элемента $\bar{x}^0 \in M$, которые задаются следующим выражением: $\langle \delta_{\bar{x}^0}; \varphi \rangle \overset{def}{=} \varphi(\bar{x}^0)$, для $\varphi \in C^\infty(M)$.

Другим примером распределения l является функция, заданная интегралом $\langle l; \varphi \rangle = \int_M p \cdot \varphi \; dx_1 \ldots x_n$, где $p(x_1, \ldots, x_n)$ — интегрируемая функция на M с конечным носителем. (Если в качестве множества функций $C^\infty(M)$ рассматривать множество бесконечно дифференцируемых функций, растущих на бесконечности не быстрее многочленов, то в качестве функций $p(x_1, \ldots, x_n)$ можно брать интегрируемые функции, быстро убывающие на бесконечности. Если в качестве множества функций $C^\infty(M)$ рассматривать множество бесконечно дифференцируемых функций с конечным носителем, то в качестве функций $p(x_1, \ldots, x_n)$ можно брать произвольные интегрируемые функции.)

Обозначение. Обозначим через M_1 множество всех распределение на M.

Очевидным образом можно ввести линейную структуру на множестве M_1. Так для двух распределений $l_1, l_2 \in M_1$ и двух чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ значение распределения $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$ на произвольном $\varphi \in C^\infty(M)$ по определению задается равенством $\langle \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2; \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle \lambda_1 l_1; \varphi \rangle + \langle \lambda_2 l_2; \varphi \rangle$.

Определение 3. *Семейство распределений $l_{s_1,\ldots,s_k} \in M_1$ с параметрами $(s_1, \ldots, s_k) \in S \subset \mathbb{R}^k$ назваетея гладким, если для любого гладкого семейства функций $\varphi_{s'_1,\ldots,s'_{k'}} \in C^\infty(M)$, для $(s'_1, \ldots, s'_{k'}) \in S' \subset \mathbb{R}^{k'}$, функция $\langle l_{s_1,\ldots,s_k}; \varphi_{s'_1,\ldots,s'_{k'}} \rangle$ является гладкой по совокупности параметров $(s_1, \ldots, s_k, s'_1, \ldots, s'_{k'})$ на множестве $S \times S' \subset \mathbb{R}^{k+k'}$.*

В частности, если $S = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $l_s \in M_1$ — гладкое семейство распределений для $s \in S$, то в этом случае мы будем говорить, что распределения $l_{1/n}$ сходятся к распределению l_0 при n, стремящемся к бесконечности. Это определение позволяет рассматривать множество M_1 как линейное топологическое пространство.

Гипотеза (или аксиома). *Множество всех распределений на M_1 вида $\sum_{i=1}^m x_i^1 \delta_{\bar{x}_i^0}$, где $x_1^1, \ldots, x_m^1 \in \mathbb{R}$, а $\delta_{\bar{x}_1^0}, \ldots, \delta_{\bar{x}_m^0}$ — дельта распределения, всюду плотно в множестве всех распределений M_1.*

Эта гипотеза утверждает, что любое распределение может быть приближено распределением в виде конечной линейной комбинации дельта распределений. Если гипотеза неверна, то мы будем рассматривать только такие распределения, которые могут быть приближены распределением такого вида.

Определение 4. *Гладкой функцией, $f : M_1 \to \mathbb{R}$ на множестве распределений называется функция f, обладающиая следующим свойством:*

для любого гладкого семейства распределений $l_{s_1,\ldots,s_k} \in M_1$ по параметрам $(s_1, \ldots, s_k) \in S \subset \mathbb{R}^k$ функция вида $f(l_{s_1,\ldots,s_k})$ является гладкой по $(s_1, \ldots, s_k) \in S \subset \mathbb{R}^k$.

Обозначим через $C^\infty(M_1)$ множество всех гладких функций на множестве всех распределений M_1.

Утверждение 1. *Если $f : M_1 \to \mathbb{R}$ — гладкая линейная функция на множестве распределений, то найдётся единственная гладкая функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$ такая, что для любого распределения $l \in M_1$ выполняется* *равенство* $f(l) = \langle l; \varphi \rangle$.

Доказательство. Семейство дельта распределений $\delta_{\bar{x}^0}$ представляет собой гладкое семейство по параметру $\bar{x}^0 \in M$. Тогда по определению гладкой функции f на множеств распределений M_1 функция $f(\delta_{\bar{x}^0})$ должна быть гладкий по параметру $\bar{x}^0 \in M$. Положим $\varphi(\bar{x}^0) \stackrel{def}{=} f(\delta_{\bar{x}^0})$. Тогда $\langle \delta_{\bar{x}^0}; \varphi \rangle = \varphi(\bar{x}^0) = f(\delta_{\bar{x}^0})$ для любого элемента $\bar{x}^0 \in M$. Пусть l_0 — произвольное распределение на M. Согласно гипотезе распределение l_0 приближается распределениями $l_{1/j}$ вида $l_{1/j} = \sum_{i=1}^{m_j} x_{ij}^1 \delta_{\bar{x}_{ij}^0}$ для $x_{ij}^1 \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, где $\delta_{\bar{x}_{ij}^0}$ — дельта распределения. То есть семейство таких распределений $l_s \in M_1$ для $s \in S = \{0\} \cup \{1/j | j \in \mathbb{N}\}$ гладкое. Тогда, по определению гладкой функции на распределениях и по определению распределения имеем равенства

$$f(l_0) = \lim_{j \to \infty} f(l_{1/j}) \text{ и } \langle l_0; \varphi \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle l_{1/j}; \varphi \rangle.$$

С другой стороны, в силу линейности f и определения φ имеем равенства:

$$f(l_{1/j}) = f(\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij}^1 \delta_{\bar{x}_{ij}^0}) = \sum_{i=1}^{m_j} x_{ij}^1 f(\delta_{\bar{x}_{ij}^0}) = \sum_{i=1}^{m_j} x_{ij}^1 \langle \delta_{\bar{x}_{ij}^0}; \varphi \rangle = \langle l_{1/j}; \varphi \rangle,$$

которые дают равенства $f(l_{1/j}) = \langle l_{1/j}; \varphi \rangle$ для $j \in \mathbb{N}$. Отсюда, в пределе, при $j \to \infty$, получаем равенство $f(l_0) = \langle l_0; \varphi \rangle$ для любого распределения $l_0 \in M_1$.

Таким образом, имеем вложение $C^\infty(M) \hookrightarrow C^\infty(M_1)$, где каждая линейная гладкая функция на M_1 представляется своей гладкой функцией на M из утверждения 1.

Кроме того, у нас есть естественное гладкое вложение $M \subset M_1$, которое каждый точке $\bar{x} \in M$ ставит в соответствие дельта функцию $\delta_{\bar{x}}$.

Эту конструкцию из определений 1–4 можно проитерировать и определить аналогичным способом пространство распределений M_{k+1} на множестве распределений M_k, как множество линейных функций из $C^\infty(M_k)$ в $\mathbb{R}$, сохраняющих гладкость на гладких семействах функций в $C^\infty(M_k)$. В свою очередь, пространство гладких функций $C^\infty(M_{k+1})$ на пространстве распределений M_{k+1} определяется как пространство всех отображений из M_{k+1} в $\mathbb{R}$, сохраняющих гладкость на гладких семействах распределений в M_{k+1}.

Для любого распределения $l \in M_k$ через δ_l обозначается дельта распределение из M_{k+1}, которое на любой гладкой функции $f \in C^\infty(M_k)$ задается равенством $\langle \delta_l; f \rangle \stackrel{def}{=} f(l)$.

Рассмотрим распределения вида

$$\bar{\delta}^{k+1} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m_{k+1}} x_i^{k+1} \, \delta_{\bar{\delta}_i^k} \in M_{k+1}, \tag{1}$$

где $x_1^{k+1}, \ldots, x_{m_{k+1}}^{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\delta_{\bar{\delta}_i^k}$ — дельта распределения, построенные по распределениям $\bar{\delta}_i^k \in M_k$ такого же вида, как и $\bar{\delta}^{k+1}$, но в M_k.

Аналогом приведенной выше гипотезы (аксиомы) для пространства распределений M_1 является следующая гипотеза.

Гипотеза (или аксиома). *Множество распределений вида $\bar{\delta}^{k+1}$ всюду плотно в пространстве распределений M_{k+1}.*

Распределения вида $\bar{\delta}^{k+1}$ задаются в конце концов (если их раскыть до распределений на M) конечными множествами точек с весами из действительных чисел, объединенными в группы. Далее эти группы в свою очередь берутся с весами и разбиваются на группы, которым также приписываются веса и т.д. Таким образом, распределения вида $\bar{\delta}^{k+1}$, которые приближают произвольное распределение из M_{k+1}, представляют собой конечную "гранулированную"структуру, которую, в принципе, можно представить в компьютерных системах при моделировании.

В результате итерирования конструкций, заданных определениями 1-4, получим цепочки вложений:

$$M \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \tag{2}$$

и

$$C^\infty(M) \hookrightarrow C^\infty(M_1) \hookrightarrow C^\infty(M_2) \hookrightarrow \ldots \tag{3}$$

Объединяя по вложениям, в пределе получим пространство распределений M_∞ и алгебру гладких функций на нем $C^\infty(M_\infty)$, на которых заданы фильтрации цепочками вложений (2) и (3).

Полезно также иметь определения свертки распределений и преобразований Фурье.

Определение 5. *Сверткой распределений $l', l'' \in M_k$ называется распределение $l' * l'' \in M_k$, значение которой на функции $f \in C^\infty(M_{k-1})$ задается выражением: $\langle l' * l''; f \rangle \stackrel{def}{=} \langle l'; \langle l''; f(x_1 + x_2) \rangle \rangle$, где $x_1, x_2 \in M_{k-1}$ и l'' действует по x_2 при фиксированном x_1.*

Определение 6. *Пусть распределение $l_{k+1} \in M_{k+1}$ и $l_k \in M_k$, $f_{k-1} \in C^\infty(M_{k-1})$. Тогда преобразованием Фурье распределения l_{k+1} называется функция $\hat{l}_{k+1} : C^\infty(M_{k-1}) \to \mathbb{C}$, заданная равенством: $\hat{l}_{k+1}(f_{k-1}) \stackrel{def}{=} \langle l_{k+1}; \exp(i\langle l_k; f_{k-1}\rangle)\rangle$, где i — мнимая единица.*

Утверждение 2. *Для произвольных распределений $l', l'' \in M_{k+1}$ преобразование Фурье от свертки распределений удовлетворяет равенству: $\widehat{l' * l''} = \hat{l}'\hat{l}''$.*

Доказательство следует из определений свертки и преобразования Фурье. Имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{l' * l''}(f_{k-1}) &= \langle \widehat{l' * l''}; \exp(i\langle l_k; f_{k-1}\rangle)\rangle = \langle l' \langle l''; \exp(i\langle l'_k + l''_k; f_{k-1}\rangle)\rangle\rangle = \\ &= \langle l' \langle l''; \exp(i\langle l'_k; f_{k-1}\rangle) \exp(i\langle l''_k; f_{k-1}\rangle)\rangle\rangle = \hat{l}'(f_{k-1})\hat{l}''(f_{k-1}).\end{aligned}$$

В данной работе хотелось бы рассмотреть дифференциальные уравнения на множествах определенных распределений и, соответственно, на множествах гладких функций на них.

Для начала рассмотрим, как можно задавать и аппроксимировать функции на распределениях.

2.1 Задание гладких функций на распределениях многочленами и рядами. Ряд Тейлора.

Функцию F на M_k можно задать гладкой функцией (или аналитической функцией, рядом, многочленом) $f(x_1, \ldots, x_m)$ от переменнных $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ и набором функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C^\infty(M_{k-1})$. Пусть $l \in M_k$ — произвольное распределение. Тогда значение функции F на распределении l можно задать следующим выражением: $F(l) = f(\langle l; \varphi_1\rangle, \ldots, \langle l; \varphi_m\rangle)$.

Если f — произвольная функция из $C^\infty(M_k)$ и $l_0 \in M_k$ — некоторое фиксированное распределение, а $\Delta l \in M_k$ произвольное распределение, то функции $f(l_0 + t\Delta l)$, для $t \in [0; 1]$, стандартным образом ставится в соответствие ряд Тейлора около l_0 разложением по t в виде:

$$f(l_0 + t\Delta l) \approx f(l_0) + tD_f^1(\Delta l) + \frac{t^2}{2!}D_f^2(\Delta l, \Delta l) + \frac{t^2}{3!}D_f^3(\Delta l, \Delta l, \Delta l) + \ldots,$$

где $D_f^s(l_1, \ldots, l_s)$, $s = 1,\ 2,\ \ldots$ — полилинейная симметричная функция на M_k от s аргументов.

Если рассмотреть значения полилинейной функции D^s_f на дельта распределениях, то мы получим гладкую симметричную функцию от s аргументов $l'_1, \ldots, l'_s \in M_{k-1}$ вида: $\mathcal{D}^s_f(l'_1, \ldots, l'_s) = D^s_f(\delta_{l'_1}, \ldots, \delta_{l'_s})$. Так построенную симметричную функцию

$$\mathcal{D}^s_f : M^s_{k-1} \to \mathbb{R} \tag{4}$$

будем называть дифференциалом функции $f \in C^\infty(M_k)$ порядка s при распределении $l_0 \in M_k$.

Легко доказывается по аналогии с доказательством утверждения 1 следующее утверждение:

для произвольных распределений $\Delta l_1, \ldots, \Delta l_s \in M_k$ значение полилинейной функции $D^s_f(\Delta l_1, \ldots, \Delta l_s) = \langle \Delta l_1, \ldots, \Delta l_s; \mathcal{D}^s_f \rangle$, где $(\Delta l_1, \ldots, \Delta l_s)$ набор линейных отображений, действующих по отдельным координатам на гладкую функцию $\mathcal{D}^s_f$.

2.2 Задание гладких функций на распределениях в виде гладких функций на взвешенных суммах дельта распределений. Конечные аппроксимации.

Пусть f — гладкая функция на множестве распределений M_1. Так как согласно гипотезе (аксиоме) множество распределений вида $\bar{\delta}^1 = \sum_{i=1}^m x^1_i \delta_{\bar{x}^0_i}$, где $x^1_1, \ldots, x^1_m \in R$, $\bar{x}^0_1, \ldots, \bar{x}^0_m \in M$ и $\delta_{\bar{x}^0_i}$ — дельта распределения, всюду плотно в пространстве всех распределений M_1, то f полностью определяется значениями на распределениях $\bar{\delta}^1$.

Заметим, что $\bar{\delta}^1$ представляет собой гладкое семейство распределений, зависящее от всей совокупности переменных, входящих в $\bar{\delta}^1$. Эту совокупность переменных для удобста организуем в группы следующим образом $\{\{x^1_1, \{\bar{x}^0_1\}\}, \ldots, \{x^1_m, \{\bar{x}^0_m\}\}\}$, где $x^1_1, \ldots, x^1_m \in R$ и $\bar{x}^0_1, \ldots, \bar{x}^0_m \in M$. Тогда, для любой гладкой функции f, заданной на множестве распределений M_1 , функция $f_{\bar{\delta}^1} = f(\bar{\delta}^1)$, яляющаяся ограничением функции f на распредлениях вида $\bar{\delta}^1$, по определению гладкости f является также бесконечно дифференцируемой по совокупности переменных, входящих в $\bar{\delta}^1$. При этом, как легко заметить из построения функции $f_{\bar{\delta}^1}$, выполняются следующие свойства:

если в функции $f_{\bar{\delta}^1}(\{\{x^1_1, \{\bar{x}^0_1\}\}, \ldots, \{x^1_m, \{\bar{x}^0_m\}\}\})$ поменять местами две подгруппы переменных $\{x^1_{i_1}, \{\bar{x}^0_{i_1}\}\}$ и $\{x^1_{i_2}, \{\bar{x}^0_{i_2}\}\}$, то функция $f_{\bar{\delta}^1}$ не изменится;

если в функции $f_{\bar\delta^1}(\{\{x_1^1,\{\bar x_1^0\}\},\ldots,\{x_m^1,\{\bar x_m^0\}\}\})$ в двух подгруппах переменных $\{x_{i_1}^1,\{\bar x_{i_1}^0\}\}$ и $\{x_{i_2}^1,\{\bar x_{i_2}^0\}\}$ выполняется равенство $\bar x_{i_1}^0 = \bar x_{i_2}^0$, то функция $f_{\bar\delta^1}$ не изменится, если эти подгруппы переменных заменить одной вида $\{(x_{i_1}^1 + x_{i_2}^1,\{\bar x_{i_1}^0\}\}$.

Аналогичные определения можно дать для гладкой функции на множестве распределений M_k при $k>1$.

Итак, пусть f — гладкая функция на множестве распределений M_k. Обозначим через

$$f_{\bar\delta^k}(\bar x^k) \overset{def}{=} f(\bar\delta^k) \tag{5}$$

— значение функции f на распределении $\bar\delta^k$ вида (1). Функция $f_{\bar\delta^k}$ зависит от всех переменных $\bar x^k$, которые входят в определение распределения $\bar\delta^k$. Для удобства разобьем это множество переменных на группы следующим образом:

$$\bar x^k = \{\{x_1^k,\{\bar x_1^{k-1}\}\},\ldots,\{x_{m_k}^k,\{\bar x_{m_k}^{k-1}\}\}\}, \tag{6}$$

где группы переменых $\bar x_i^{k-1}$, для $i=1,\ldots,m_k$, построены таким же способом. Так индуктивно продолжается до $k=1$, а этот случай определялся выше.

Утверждение 3. *Пусть f — гладкая функция на пространстве распределений M_k. Тогда функция f однозначно определяется функцией $f_{\bar\delta^k}$, заданной выражением (5) от переменных вида (6). Функция $f_{\bar\delta^k}$ гладко зависит от этих переменных и обладает следующими свойствами:*

если в некоторой ее подгруппе переменных

$$\bar x_i^s = \{\{x_{i1}^s,\{\bar x_{i1}^{s-1}\}\},\ldots,\{x_{im_i}^s,\{\bar x_{im_i}^{s-1}\}\}\},$$

для $s=1,\ldots,k$, поменять местами две ее подгруппы $\{x_{ij_1}^s,\{\bar x_{ij_1}^{s-1}\}\}$ и $\{x_{ij_2}^s,\{\bar x_{ij_2}^{s-1}\}\}$, то функция $f_{\bar\delta^k}$ не изменится;

если в некоторой ее подгруппе переменных

$$\bar x_i^s = \{\{x_{i1}^s,\{\bar x_{i1}^{s-1}\}\},\ldots,\{x_{im_i}^s,\{\bar x_{im_i}^{s-1}\}\}\}$$

для некоторых двух ее подгрупп $\{x_{ij_1}^s,\{\bar x_{ij_1}^{s-1}\}\}$ и $\{x_{ij_2}^s,\{\bar x_{ij_2}^{s-1}\}\}$, выполняются равенства $\bar x_{ij_1}^{s-1} = \bar x_{ij_2}^{s-1}$, то функция $f_{\bar\delta^k}$ не изменится, если эти подгруппы переменных заменить одной вида $\{(x_{ij_1}^1 + x_{ij_2}^1,\{\bar x_{ij_1}^{s-1}\}\}$.

Доказательство. Доказательство утверждения аналогично доказательству этого утверждения для гладкой функции на пространстве распределений M_1. Итак, так как согласно гипотезе (аксиоме) множество распределений вида $\bar{\delta}^k$ всюду плотно на пространстве распределений M_k и является гладким семейством от переменных $\bar{x}^k$, то по определению гладкой функции на распределениях гладкая функциия f полность определяется значениями на распределениях $\bar{\delta}^k$, и функция $f_{\bar{\delta}^k}(\bar{x}^k){=}f(\bar{\delta}^k)$ является гладкой от переменных $\bar{x}^k$. Последние два свойства, сформулированные в утверждении, прямо следуют из определений функции $f_{\bar{\delta}^k}$, распределения $\bar{\delta}^k$ и разбиения на группы переменных $\bar{x}^k$ распределения $\bar{\delta}^k$.

3 Дифференциальные уравнения на множествах распределений и на множествах гладких функций на распределениях

3.1 Векторные поля на пространстве распределений. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения 1-го порядка в частных производных.

Дифференциальные уравнения на пространстве распределений нам понадобятся для моделирования процессов, состояния которых в каждый момент времени t определяется распределением $l(t)$ из пространства распределений M_k. Здесь нас будут интересовать гладкие процессы по параметру t. Это значит, что $l(t)$ можно продифференцировать по t и $\frac{dl(t)}{dt}$ является гладким распределением в M_k.

В предыдущих разделах были определены пространства распределений M_k и пространства гладких функций $C^\infty(M_k)$ из M_k в $\mathbb{R}$. По аналогии с этими конструкциями определим гладкие отображения из одного пространства с гладкой структурой в другое пространство.

Определение 7. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество в n-мерном пространстве. Гладкой функцией $\varphi \in C^\infty(S)$ из S в $\mathbb{R}$ называется ограничение гладкой функции $\varphi' \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ на подмножество S, то есть $\varphi = \varphi'|_S$. Отображение $f_1 : S_1 \to S$, где $S_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, называется гладким, если для любой гладкой функции $\varphi : S \to \mathbb{R}$ на S композиция функций $\varphi \circ f_1$ являеся гладкой функцией на S_1.*

Определение 8. *Будем говорить, что пространство L имеет гладкую структуру, если для любого $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, задано некоторое множество отображений $C^\infty(S; L)$ из S в L, которые называются глад-*

ими. При этом выполняется следующее условие: для любых гладких отображений $f_2 : S_1 \to S$ и $f_1 : S \to L$ их композиция $f_1 \circ f_2$ является гладким отображением из S_1 в L.

Определение 9. *Пусть L_1 и L_2 — пространства с гладкими структурами. Отображение $f : L_1 \to L_2$ называется гладким, если оно сохраняет гладкую структуру, то есть для любого гладкого отображения $f_1 : S \to L_1$, где $S \subset \mathbb{R}^n$, композиция отображений $f \circ f_1$ является гладким отображением из S в L_2.*

Определение 10. *Пусть L_1 и L_2 — пространства с гладкими структурами. Семейство гладких отображений $f_s : L_1 \to L_2$ для $s \in S \subset \mathbb{R}^n$ называется гладким, если для любого гладкого отображения $f_1 : S_1 \to L_1$, где $S_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, композиция отображений $f_s \circ f_1$ является гладким отображением из $S \times S_1$ в L_2.*

Теперь мы готовы дать определение гладкого векторного поля на пространстве распределений M_k.

Определение 11. *Гладким векторным полем a на пространстве распределений M_k называется гладкое отображенние $a : M_k \to M_k$.*

Утверждение 4. *Если $a : M_k \to M_k$ — векторное поле на M_k и $f \in C^\infty(M_k)$ — гладкая функция, то гладкими отображениями являются отображения $fa : M_k \to M_k$ и $af : M_k \to R$, заданные, соответсвенно, для $l \in M_k$ выражениями $(fa)(l) \overset{def}{=} f(l)a(l)$ и $(af)(l) \overset{def}{=} \langle a(l); \mathcal{D}^1_f(l)\rangle$, где $\mathcal{D}^1_f(l)$ — дифференциал функции f при распределении l, определенный выражением (4) .*

Выражение fa, определенное в утверждении, назвается умножением векторного поля на функцию, а выражение af называется действием векторного поля на функцию.

Доказательство утверждения непосредственно следует из определений.

Заметим, что действие векторного поля a на гладкие функции определяет отображение $a : C^\infty(M_k) \to C^\infty(M_k)$, которое является дифференцированием алгебры функций $C^\infty(M_k)$. В частности, если $f = f_1 f_2$ — произведение функций, то имеем равенство $af = a(f_1 f_2) = f_1 a f_2 + f_2 a f_1$.

Определение 12. *Если a_1 и a_2 — два векторных поля на M_k, то производной векторного поля a_2 по векторному полю a_1 называется векторное поле $a_1(a_2)$, заданное на распределении $l \in M_k$ равенством*

$$a_1(a_2)(l) \overset{def}{=} \frac{d}{dt} a_2(l + t a_1(l))|_{t=0}.$$

Заметим, что линейное пространство векторных полей является алгеброй Ли относительно операции $[a_1, a_2]$ коммутатора векторных полей a_1 и a_2 , заданного выражением $[a_1, a_2] \stackrel{def}{=} a_1(a_2) - a_2(a_1)$.

Каждое векторное поле $a : M_k \to M_k$ может быть линейно продолжено до векторного поля $\bar{a}^{k+1} : M_{k+1} \to M_{k+1}$ на пространстве распределений M_{k+1}. Более точно:

Определение 13. *Пусть $a : M_k \to M_k$ векторное поле на пространстве M_k и $l \in M_k$ — произвольное распределение. Через $\bar{a}^{k+1} : M_{k+1} \to M_{k+1}$ обозначим векторное поле на пространстве распределений M_{k+1}, которое на дельта распределениях $\delta_l \in M_{k+1}$ принимает значения, равные $a(l)$, то есть $\bar{a}^{k+1}(\delta_l) = \delta_{a(l)}$. Если $f \in C^\infty(M_k)$, то выражение $f(a(l))$ задает значение новой функции $f \circ a \in C^\infty(M_k)$ — композиции отображения a и функции f. Если $l_{k+1} \in M_{k+1}$ — произвольное распределение, то распределение $\bar{a}^{k+1}(l_{k+1}) \in M_{k+1}$ — это линейная гладкая функция на $C^\infty(M_k)$, значение которой на функции $f \in C^\infty(M_k)$ по определению задается выражением $\langle \bar{a}^{k+1}(l_{k+1}); f\rangle \stackrel{def}{=} \langle l_{k+1}; f \circ a\rangle$.*

Перейдем к интегрированию векторных полей.

Определение 14. *Однопараметрической локальной полугруппой G_t на пространстве распределений M_k называется гладкое семейство гладких отображений $G_t : M_k \to M_k$ для $t \in [0; \epsilon) \subset \mathbb{R}$, обладающее следующим свойствами:*

$G_0 : M_k \to M_k$ — тождественное отображение;

если $t, t_1, t + t_1 \in [0; \epsilon)$, то композиция отображений G_t и G_{t_1} удовлетворяет равенству $G_{t_1} G_t = G_{t+t_1}$.

Если $G_t : M_k \to M_k$ — однопараметрическая локальная полугруппа, то ей соответствует векторное поле $g : M_k \to M_k$, которое для любого $l \in M_k$ задается формулой:

$$g(l) \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt} G_t(l)|_{t=0}.$$

Утверждение 5. *Траектория $l_t = G_t(l)$ распределения $l \in M_k$ относительно полугруппы G_t удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{dl_t}{dt} = g(l_t),$$

где g — векторное поле полугруппы G_t.

Доказательство. Рассмотрим производную $l_t = G_t(l)$ по t. Воспользовавшись определением полугруппы и векторного поля полугруппы, получим:

$$\frac{dl_t}{dt} = \frac{d}{dt} G_t(l)|_t = \frac{d}{dt_1} G_{t+t_1}(l)|_{t_1=0} = \frac{d}{dt_1} G_{t_1}(G_t(l))|_{t_1=0} = g(l_t).$$

Определение 15. *Уравнение вида:*

$$\frac{dl_t}{dt} = a(l_t), \tag{7}$$

с начальным условием $l_0 = l \in M_k$, где a — векторное поле на M_k, называется обыкновенным дифференциальным уравнением на M_k.

Векторное поле a называется локально интегрируемым, если существует локальная полугруппа G_t с векторным полем a.

Обыкновенное дифференциальное уравнение называется линейным, если векторное поле a в нем является суммой $a = k + b$ гладкого линейного отображения $k : M_k \to M_k$ и постоянного отображения в элемент $b \in M_k$. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение называется однородным, если $b = 0$.

Примерами однопараметрический групп являются группы сдвигов по распределению $b \in M_k$. Такие группы задаются выражениями $G^b_t(l) = l + tb$, где $l \in M_k$.

(В общем случае мне неизвестно, любое ли обыкновенное дифференциальное линейное уравнение является локально интегрируемым. Конечно, метод ломанных Эйлера можно было бы применить для приближенного решения уравнения и в этом случае, рассматривая уравнение в приближении на распределениях $\bar{\delta}^k$ вида (1) с переменными, принадлежащими решетке с малым шагом. При этом возникает вопрос об определении интервала времени $[0, \epsilon]$, на котором оператор, построенный в методе ломанных Эйлера, является сжимающим для доказательства сходимости полученных приближений. Аналогичные вопросы возникают для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [2].)

Перейдем к построению двойственных конструкций к только что введенным.

Если $G_t : M_k \to M_k$ — локальная полугруппа, то через $G^*_t : C^\infty(M_k) \to C^\infty(M_k)$ обозначим гладкое семейство гомоморфизмов алгебр функций — двойственную полугруппу на множестве гладких функций, которая для каждого распределения $l \in M_k$ и гладкой функции $f \in C^\infty(M_k)$ задается равенством: $G_t^*(f)(l) \stackrel{def}{=} f(G_t(l))$.

Если ввести обозначение $f_t \stackrel{def}{=} G_t^*(f)$, то, как нетрудно видеть функция f_t удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial f_t(l)}{\partial t} = \langle g(l); \mathcal{D}^1_{f(t)}(l) \rangle, \tag{8}$$

где g — векторное поле полугруппы G_t, а $\mathcal{D}^1_{f(t)}(l)$ — дифференциал, заданный выражением (4), для функции $f(t)$ в распределении l.

Уравнение (8) для произвольного векторного поля g сответствует линейному уравнению в частных производных, а обыкновенное уравнение (7) с этим векторным полем является уравнением характеристик для уравнения в частных производных.

Заметим также, любая полугруппа в $G_t : M_k \to M_k$, действующая на пространстве распределений M_k, может быть поднята до полугруппы $G_t^{k+1} : M_{k+1} \to M_{k+1}$ на пространстве распределений M_{k+1} следующим образом. По полугруппе G_t строится двойственная полугруппа гомоморфизмов $G_t^* : C^\infty(M_k) \to C^\infty(M_k)$, где $G_t^*(f_k)(l_k) \stackrel{def}{=} f_k(G_t(l_k))$. Если $l_{k+1} \in M_{k+1}$ и $f_k \in C^\infty(M_k)$, то $\langle G_t^{k+1}(l_{k+1}); f_k \rangle \stackrel{def}{=} \langle l_{k+1}; G_t^*(f_k) \rangle$.

4 Модель поведения ансабля частиц

Пусть X — конечное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что у нас имеется N объектов, каждый из которых может находится в одном из состояний из множества X.

Обозначим через p частотное распределение N объектов по множеству состояний X. То есть $p = \sum\limits_{x \in X} p(x)\delta_x$, где $Np(x)$ — число объектов, находящихся в состоянии $x \in X$.

Через f обозначим гладкую функцию на распределениях в $\mathbb{R}^n$, которую будем называть наблюдаемой на системе объектов.

Будем предполагать, что динамика поведения такой системы объектов определяется случайными переходами объектов из состояние в состояние двух типов: спонтанными случайными переходами из состояние в состояние самих объектов и случайными переходами из состояние в состояние за счет парного взаимодействия произвольных двух объектов.

Пусть

$\lambda^{m,N}_{x^1;x^2}$ — интенсивность случайного перехода каждого отдельного объекта из состояния x^1 в состояние x^2;

$\lambda^{m,N}_{x^1_1,x^1_2;x^2_1,x^2_2}$ — интенсивность случайного перехода за счет парного взаимодействия из состояний x^1_1 и x^1_2 в состояния x^2_1 и x^2_2,

где m и N — параметры, харктеризующие подробность описания и число объектов в системе.

В этих обознасениях скорость изменения среднего значения наблюдаемой f на состоянии p описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = \sum_{x^1,x^2} \lambda^{m,N}_{x^1;x^2} N p(x^1) \left(f\Big(p + \frac{1}{N}\delta_{x^2} - \frac{1}{N}\delta_{x^1}\Big) - f(p) \right) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{x^1_1,x^1_2,x^2_1,x^2_2} \lambda^{m,N}_{x^1_1,x^1_2;x^2_1,x^2_2} N^2 p(x^1_1) p(x^1_2) \left(f\Big(p+\frac{1}{N}\delta_{x^2_1}+\frac{1}{N}\delta_{x^2_2}-\frac{1}{N}\delta_{x^1_1}-\frac{1}{N}\delta_{x^1_2}\Big) - f(p) \right).$$

Если N достаточно велико, то разлагая функции от распределений в уравнении (9) в ряд Тейлора в следующем виде:

$$f\Big(p + \frac{1}{N}\delta_{x^2} - \frac{1}{N}\delta_{x^1}\Big) - f(p) = \frac{1}{N}(\mathcal{D}^1_f(p)(x^2) - \mathcal{D}^1_f(p)(x^1)) + O\left(\frac{1}{N^2}\right); \tag{10}$$

$$f\Big(p+\frac{1}{N}\delta_{x^2_1}+\frac{1}{N}\delta_{x^2_2}-\frac{1}{N}\delta_{x^1_1}-\frac{1}{N}\delta_{x^1_2}\Big) - f(p) = \tag{11}$$
$$= \frac{1}{N}(\mathcal{D}^1_f(p)(x^2_1) + \mathcal{D}^1_f(p)(x^2_2) - \mathcal{D}^1_f(p)(x^1_1) - \mathcal{D}^1_f(p)(x^1_2)) +$$
$$+\frac{1}{2N^2} \sum_{i,j,i',j'=1}^{2} (-1)^{j+j'} \mathcal{D}^2_f(p)(x^j_i, x^{j'}_{i'}) + O\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

где $\mathcal{D}^1_f(p)(x)$ — дифференциал первого порядка функции f на распределении p, а $\mathcal{D}^2_f(p)(x_1,x_2)$ — дифференциал второго порядка этой функции на распределении p.

Подставив эти выражения в уравнение (9) и отбросив слагаемые порядка $O(N^{-1})$, получим следующее дифференциальное уравнение для функции от распределений f_t :

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = \langle p; A^N(\mathcal{D}^1_f(p))\rangle + \langle p,p; B^N(\mathcal{D}^2_f(p))\rangle, \tag{12}$$

где A^N — линейный оператор от дифференциала первого порядка функции f, а B^N — линейный оператор от дифференциала 2-го порядка, Оператор A^N выражается через интенсивности спонтанных переходов $\lambda^{m,N}_{x^1;x^2}$, интенсивности переходов парных взаимодействий $\lambda^{m,N}_{x_1^1,x_2^1;x_1^2,x_2^2}$ и через число объектов в системе N. Оператор B^N выражается через интенсивности переходов парных взаимодействий $\lambda^{m,N}_{x_1^1,x_2^1;x_1^2,x_2^2}$ и N.

5 Математическая модель генетических алгоритмов

Генетические алгоритмы представляют собой разновидность эвристических алгоритмов, в основе которых лежат представления об эволюционных процессах в области молекулярной биологии. Генетические алгоритмы активно используются в задачах многомерной оптимизации.

Перейдем к описанию алгоритма.

В каждый момент времени имеется N объектов (объем популяции). Каждый объект может находиться в одном из $m = 2^l$ состояний, где l — длина хромосомы. Номер состояния объекта представляется в виде двоичной записи хромосомы.

Состояние процесса в каждый момент времени, как и в предыдущей модели задается набором чисел $(x_1 = n_1/N, \ldots, x_N = n_m/N$, где n_i — число объектов в популяции, находящихся в состоянии i, для $i = 1, \ldots, m$.

Изменение состояний объектов происходит:

из-за случайной мутации у каждого объекта в любом знаке хромосомы, которая вызывает переходы из состояния i в состояние j каждого объекта с некоторой интенсивностью;

из-за случайного взаимодействия любой пары объектов, которое называется кроссинговером, когда их хромосомы разрываются случайно в любом одном месте, и объекты обмениваются частями хромосом;

из-за случайного взаимодействия любой пары объектов, которое называется селекция-репродукция, когда объекты сравниваются по некоторой целевой функции φ, и объект из этой пары с меньшим значением функции уничтожается, а другой объект дублируется.

Обозначим через λ_N^{mut} интенсивность мутации в каждом знаке хромомы объекта в зависимости от числа объектов N, через λ_N^{cr} интенсивность процесса кроссинговера для каждой пары объектов в каждом знаке хромосомы и через λ_N^{sel} интенсивность процесса селекции-репродукции для каждой пары объектов.

Обозначим также через $cr(1, s, i, j)$ функцию, которая по номерам состояний объектов i и j выдает результат кроссинговера в s-ом знаке, где $1 \le s \le l$, в двоичном представлении этих чисел, то есть число $cr(1,s,i,j)$, у которого знаки в двоичном представлении до s-ого знака совпадает со знаками числа i, а остальные знаки берутся от числа j. Аналогично, через $cr(2,s,i,j)$ обозначается функция, которая выдает второе число кроссинговера чисел i и j в s-ом знаке, когда первая часть до знака s берется от числа j, а вторая от числа i.

Наконец, через $max\varphi(i,j)$ обозначим функцию, которая по двум числам i и j выдает одно из них, на котором функция выбора φ принимает большее значение.

Если $P(x_1,\ldots,x_m,t)$ — вероятность нахождения процесса в момент времени t в состоянии $(x_1,\ldots,x_m)$, и $f_0(x_1,\ldots,x_m)$ — функция на пространстве состояний (наблюдаемая), то положим $f_t(x_1,\ldots,x_m) \stackrel{def}{=} \langle P; f_0\rangle$ — математическое ожидание наблюдаемой f_0 для этого процесса в момент времени t.

Тогда, в соответствии с описанием марковских процессов с непрерывным временем имеем следующее уравнение для математического ожидания наблюдаемой этого процесса:

$$\frac{\partial f_t(x_1,\ldots,x_m)}{\partial t} = \sum_{i,j\in\{1,\ldots,m\};\ |i-j|_b=1} N x_i \lambda_N^{mut} \left(f_t\Big(\bar{x} - \frac{\delta_i}{N} + \frac{\delta_j}{N}\Big) - f_t(\bar{x})\right) +$$
$$\sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i,j\in\{1,\ldots,m\}} N^2 x_i x_j \lambda_N^{cr} \left(f_t\Big(\bar{x} - \frac{\delta_i}{N} - \frac{\delta_j}{N} + \frac{\delta_{cr(1,s,i,j)}}{N} + \frac{\delta_{cr(2,s,i,j)}}{N}\Big) - f_t(\bar{x})\right) +$$
$$\sum_{i,j\in\{1,\ldots,m\}} N^2 x_i x_j \lambda_N^{sel} \left(f_t\Big(\bar{x} - \frac{\delta_i}{N} - \frac{\delta_j}{N} + \frac{2\delta_{max\varphi(i,j)}}{N}\Big) - f_t(\bar{x})\right), \tag{13}$$

где $|i-j|_b$ — число различий в знаках для двоичного представления чисел i и j, а через δ_k обозначен вектор в $\mathbb{R}$, у которого k -ая координата равна 1, а остальные координанаты равны 0.

Если полученное уравнение рассматривается для большого N, то аргументы функции f_t в нем мало отличаются от $\bar{x}$. Разложим фунцию f_t в этом уравнении в ряд Тейлора до членов второго порядка в точке $\bar{x}$. Получим следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\partial f_t(x_1,\ldots,x_m)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,m\};\\ |i-j|_b=1}} x_i\lambda_N^{mut}\Bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)f_t+\frac{1}{2N}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^2 f_t+O(N^{-2})\Bigg)+$$

$$+\sum_{s=1}^{l-1}\sum_{i,j\in\{1,\dots,m\}} Nx_ix_j\lambda_N^{cr}\Bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial x_{cr(1,s,i,j)}}+\frac{\partial}{\partial x_{cr(2,s,i,j)}}-\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)f_t+$$

$$+\frac{1}{2N}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{cr(1,s,i,j)}}+\frac{\partial}{\partial x_{cr(2,s,i,j)}}-\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2 f_t+O(N^{-2})\Bigg)+$$

$$+\sum_{i,j\in\{1,\dots,m\}} Nx_ix_j\lambda_N^{sel}\Bigg(\Big(\frac{2\partial}{\partial x_{max\varphi(i,j)}}-\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)f_t+$$

$$+\frac{1}{2N}\Big(\frac{2\partial}{\partial x_{max\varphi(i,j)}}-\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2 f_t+O(N^{-2})\Bigg). \qquad (14)$$

Дальнейшей целью исследования этого уравнения является получение приближение этого уравнения при числе объектов N и длине хромосом l, одновременно стремящихся к бесконечности, получении асимптотики решений получившегося уравнения и исследование связи этого решения при t,стремящемся к бесконечности, с функцией отбора φ.

Список литературы

[1] Виноградов А.М. Джет Неструев. Гладкие многообразия и наблюдаемые. М.:МЦНМО, 2003, 317 с.

[2] Дж. Голдстейн. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.: Выща школа, 1989, 347 с.