# Алгебра скрытых отношений

Е. М. Бениаминов

**Аннотация**

Реляционные алгебры давно и успешно используются для моделирования баз данных. В работе рассматривается аналог реляционной алгебры, но для случая, когда пользователю не видны полностью значения атрибутов, а только с точностью до некоторого отношения эквивалентности на доменах. Этот случай важен для так называемых статистических баз данных, когда нужно выдавать и всесторонне анализировать сводную информацию по данным, хранящимся в некоторой базе данных, но доступ пользователям к персональным данным в базе данных закрыт.

По аналогии с реляционным подходом к базам данных, в этом случае вводится понятие скрытого отношения, система операций над скрытыми отношениями. Иследуется полученные алгебры и вводится алгебраический язык запросов.

## 1 Основные определения

В этом разделе вводятся основные определения понятий, которые нам потребуются для моделирования баз данных со скрытами отношениями. Основное среди них — понятие скрытого отношения, которое является обобщением обычного понятия отношения.

Так же, как и в реляционном подходе к базам данных [1, 2] атрибут отношения $a$ задается именем $a$ и областью значений (доменом) атрибута $D_a$. Здесь домен $D_a$ иногда будет называться областью наблюдаемых значений потому, что будет предполагаться, что у атрибута $a$ могут быть и другие домены $D'_a$. Значения атрибутов в этих доменах неполностью наблюдаемы пользователем в отношениях. При этом предполагается, что каждое значение $d' \in D'_a$ пользователь воспринимает, как значение $p'(d') \in D_a$ в области наблюдаемых значений $D_a$ атрибута $a$. Сответствие между ненаблюдаемыми значениями и наблюдаемыми задается отображением $p' : D'_a \longrightarrow D_a$.

**Пример 1.** Для примера, атрибут с именем "Person"в системе, в которой мы хотим скрыть идентификацию пользователя в качестве домена наблюдаемых значений может состоять из одного элемента, то есть $D_{Person} = \{*\}$, а домен реальных значений может быть $D' = varchar(30)$. Отображение наблюдения $p'$ в этом случае есть стандартное отображение множества $varchar(30)$ в одноточечное множество$\{*\}$.

**Пример 2.** В качестве атрибута рассмотрим атрибут с именем возраст "age"с наблюдаемыми значениями $D_{age}$ в виде множества интервалов, которые именуются, как "младенческий "младший до школьный"и т. д. В качестве домена реальных значений для атрибута может рассматриваться целочисленный тип данных $D'_{age} = integer$. Отображение $p' : D'_{age} \longrightarrow D_{age}$ соответствует принадлежности числа к интервалу.

Отношением $r$ с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$, как обычно, называется конечное подмножество в декартовом произведении доменов $r \subset D_{a_1} \times ... \times D_{a_n}$ соответствующих атрибутов. Домены для атрибутов с различными именами могут совпадать. В нашем случае, для статистических исследований строки отношений рассматриваются в расширенных (скрытых) доменах $D'_{a_i}$ и с весами из множества действительных чисел $R$.

**Определение 1.** *Скрытым отношением $\varphi$ с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$ называется функция $\varphi : D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow R$ из декартого произведения расширенных доменов $p'_{a_1} : D'_{a_1} \longrightarrow D_{a_1}, ..., p'_{a_n} : D'_{a_n} \longrightarrow D_{a_n}$ соответствующих атрибутов $a_1, ..., a_n$ в множество действительных чисел $R$.*

Носителем $r'_\varphi$ скрытого отношения $\varphi$ называется множество всех строк в декартовом произведении $D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n}$, на которых это скрытое отношение, как функция, не равна нулю. То есть

$$r'_\varphi = \{(d'_1, ..., d'_n) \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \mid \varphi(d'_1, ..., d'_n) \neq 0\}.$$

Далее в основном мы будем рассматривать скрытые отношения с конечным носителем.

Наблюдаемая часть носителя $r'_\varphi$ — это, по определению, образ подмножества $r'_\varphi \subset D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n}$ при отображении проекции

$$p'_{a_1} \times ... \times p'_{a_n} : D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow D_{a_1} \times ... \times D_{a_n}.$$

Пользователь, как и в обычных базах данных может обратиться к скрытому отношению по имени, но видеть он может только суммарные значения весов строк по скрытым доменам самого отношения или результатов операций над скрытыми отношениями.

Введем теперь систему операций над скрытыми отношениями и некоторые соотношения между ними.

**Op1. Суммирование по скрытому домену.** Результат операции $\Sigma a_i$ суммирования по скрытому домену атрибута $a_i$ в скрытом отношении $\varphi$ это функция

$$\Sigma a_i \varphi : D'_{a_1} \times ... D'_{a_{i-1}} \times D_{a_i} \times D'_{a_{i+1}} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow R,$$

значение которой на кортеже $(d'_1, ..., d_i, ..., d'_n)$ вычисляется по правилу:

$$\Sigma a_i \varphi(d'_1, ..., d_i, ..., d'_n) = \sum_{d'_i \in \{d'_i \in D'_i \ | \ p'_i(d'_i) = d_i\}} \varphi(d'_1, ..., d'_i, ..., d'_n).$$

Очевидно, для разных атрибутов $a_i$ и $a_j$ операции суммирования $\Sigma a_i$ и $\Sigma a_j$ коммутируют между собой. То есть выполняются равенства:

$$\Sigma a_i \Sigma a_j \varphi = \Sigma a_j \Sigma a_i \varphi.$$

**Op2. Сумма, разность и умножение скрытых отношений с одинаковыми наборами атрибутов.** Аналогами теоретико-множественных операций над отношениями для скрытых отношений $\varphi_1$ и $\varphi_2$ с одинаковыми наборами атрибутов являются операции суммы $\varphi_1 + \varphi_2$, разности $\varphi_1 - \varphi_2$ и умножения функций $\varphi_1 \varphi_2$, соответствующих этим скрытым отношениям. В результате этих операций получаются новые скрытые отношения с тем же набором атрибутов и теми же скрытыми доменами этих атрибутов.

Наблюдаемой $f$ с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$ будем называть произвольную функцию:

$$f : D_{a_1} \times ... \times D_{a_n} \longrightarrow R$$

из декартого произведения наблюдаемых доменов соответствующих атрибутов в множество действительных чисел.

**Op3. Умножения скрытого отношения на наблюдаемую с тем же набором атрибутов.** Результат операции $f\varphi$ для наблюдаемой $f$ на скрытое отношение $\varphi$ с тем же набором атрибутов является скрытое отношение, значение функции которого на на кортеже $(d'_1, ..., d'_n) \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n}$ из элементов в скрытых доменов задается выражением

$$(f\varphi)(d'_1, ..., d'_n) \stackrel{def}{=} f(p'_1(d'_1), ..., p'_n(d'_n))\varphi(d'_1, ..., d'_n)$$

Очевидно, что множество скрытых отношений с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$ и скрытыми доменами $D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n}$ образуют коммутативную алгебру над кольцом наблюдаемых с тем же набором атрибутов относительно операций сложения и умножения.

**Ор4. Суммирование $Sa_i$ скрытого отношения $\varphi$ по значениям некоторого атрибута $a_i$.** Эта операция является аналогом операции проекци на отношениях. Для скрытого отношения $\varphi : D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow R$ с конечным носителем и атрибута $a_i$ операция $Sa_i$ строит скрытое отношение

$$Sa_i\varphi : D'_{a_1} \times ... \times \ D'_{a_{i-1}} \times D'_{a_{i+1}} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow R$$

с меньшим набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\} \backslash \{a_i\}$. По определению значение скрытого отношения $Sa_i\varphi$ на строке $(d'_1, ..., d'_{i-1}, d'_{i+1}, ..., d'_n) \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_{i-1}} \times D'_{a_{i+1}} \times ... \times D'_{a_n}$ задается выражением:

$$(Sa_i\varphi)(d'_1, ..., d'_{i-1}, d'_{i+1}, ..., d'_n) \stackrel{def}{=} \sum_{d'_i \in D'_i} \varphi(d'_1, ...d'_i, ..., d'_n)$$

**Ор5. Произведение скрытых отношений с разными наборами атрибутов.** Эта операция является аналогом соединения отношений. Пусть $\varphi_1$ и $\varphi_2$ скрытые отношения с наборами атрибутов $\{a_{11}, ..., a_{1n}\}$ и $\{a_{21}, ..., a_{2m}\}$, соответственно, но с одинаковыми скрытыми доменами для атрибутов с одинаковыми именами. Через $\varphi_1\varphi_2$ обозначается скрытое отношение с набором атрибутов $\{a_{11}, ..., a_{1n}\} \cup \{a_{21}, ..., a_{2m}\}$ — объединением исходных наборов атрибутов, которое как функция задается как произведение функций:

$$\varphi_1\varphi_2 \stackrel{def}{=} \varphi_1(a_{11}, ..., a_{1n})\varphi_2(a_{21}, ..., a_{2m}).$$

В этой записи имена атрибутов $a_{ij}$ нужно воспринимать как переменные, принимающие значения в своих скрытых доменах $D'_{a_{ij}}$. Причем атрибуты с одинаковыми именами в разных функциях должны принимать одинаковые значения. Заметим, что в случае, когда наборы атрибутов скрытых отношений не пересекаются, операция умножения скрытых отношений соответствует операции декартого произведения обычных отношений.

Перейдем к операциям над скрытыми отношениями, связанным с заменой (согласованием) наборов атрибутов.

Отображение наборов атрибутов $\sigma : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow \{a_1, ..., a_n\}$, сохраняющее типы атрибутов (домены атрибутов), будем называть согласованием наборов атрибутов.

Если отображение

$$d' : \{a_1, ..., a_n\} \longrightarrow D'_{a_1} \cup ... \cup D'_{a_n},$$

задающее строку декартого произведения

$$(d'(a_1), ..., d'(a_n)) \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n},$$

то композиция отображений $d'\sigma$ задает строку в декартовом произведении $D'_{b_1} \times ... \times D'_{b_k}$. В результате получаем отображение, которое мы обозначим чезез $\sigma'$,

$$\sigma' : D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow D'_{b_1} \times ... \times D'_{b_k}, \text{где} \quad \sigma'(d'(a_1), ..., d'(a_n)) \stackrel{def}{=} d'\sigma. \quad (1)$$

Очевидно, что, если отображение $\sigma$ сюрективно, то отображение $\sigma'$ — инъективно.

**Op6. Прямой образ скрытого отношения относительно согласования наборов атрибутов.** Если $\varphi : D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow R$ — скрытое отношения с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$ и $\sigma : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow \{a_1, ..., a_n\}$ — согласование наборов атрибутов, то через $\sigma^*$ обозначим операцию прямого образа, которая по скрытому отношению $\varphi$ с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$ строит скрытое отношение $\sigma^*\varphi$ с набором атрибутов $\{b_1, ..., b_k\}$. По определению полагаем значение функции

$$\sigma^*\varphi : D'_{b_1} \times ... \times D'_{b_k} \longrightarrow R$$

на строке $d'_B : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow D'_{b_1} \cup ... \cup D'_{b_k}$ равным выражению

$$(\sigma^*\varphi)(d'_B) \stackrel{def}{=} 0 + \sum_{\substack{d' \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \\ d'\sigma = d'_B}} \varphi(d').$$

В частном случае, когда $\sigma$ — вложение $\sigma : \{a_1, ..., a_n\} \backslash \{a_i\} \hookrightarrow \{a_1, ..., a_n\}$, операции прямого образа $\sigma^*$ и суммирования $Sa_i$ по значению атрибута $a_i$ совпадают.

Если $\sigma$ — биекция, то в этом случае операцию $\sigma^*$ будем называть также операцией замены атрибутов.

Заметим, кроме того, что, если согласование наборов атрибутов $\sigma$ переводит два атрибута $b_i$ и $b_j$ в один, то есть $\sigma(b_i) = \sigma(b_j)$, то скрытое отношение $\sigma^*\varphi$ равно 0 на строках $d'_B : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow D'_{b_1} \cup ... \cup D'_{b_k}$, в которых $d'_B(b_i) \neq d'_B(b_j)$.

**Op7. Обратный образ скрытого отношения относительно согласования наборов атрибутов.** Если $\sigma : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow \{a_1, ..., a_n\}$ — согласование наборов атрибутов, то через $\sigma_*$ обозначим операцию обратного образа, которая по скрытому отношению $\psi : D'_{b_1} \times ... \times D'_{b_k} \longrightarrow R$ с набором атрибутов $\{b_1, ..., b_k\}$ строит скрытое отношение $\sigma_*\psi : D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \longrightarrow R$ с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$. По определению скрытое отношение $\sigma_*\psi$, как функция, является композицией функций $\psi$ и $\sigma'$, где $\sigma'$ задается выражением (1), то есть $\sigma_*\psi = \psi\sigma'$.

Особенностью операции $\sigma_*$ в случае, когда $\sigma$ не сюръективно и скрытые домены $D'_{a_i}$ бесконечны, является то, что скрытые отношения с конечным носителем могут переводиться этой операцией в скрытые отношения с бесконечным носителем. Для сглаживания этого недостатка операция обратного образа будет применяться в сочетании с операцией умножения на скрытое отношение с конечным носителем, то есть в виде $\sigma_*(\psi)\varphi$, где $\varphi$ — скрытое отношение с конечным носителем.

Легко проверяются следующие свойства операций прямого и обратного образа.

**Утверждение 1.** *Операции прямого и обратного образа удовлетворяют следующим соотношениям:*

*1. Операции прямого и обратного образа функториальны. Это значит, что,*

*если $1_A : A \longrightarrow A$ — тождественное согласование атрибутов, то операции $(1_A)^*$ и $(1_A)_*$ являются тождественными отображениями;*

*если $\sigma_1 : A \longrightarrow B$ и $\sigma_2 : B \longrightarrow C$ — согласования наборов атрибутов, то для композиции этих согласований выполняются равенства $(\sigma_2 \circ \sigma_1)^* = \sigma_1^* \circ \sigma_2^*$ и $(\sigma_2 \circ \sigma_1)_* = (\sigma_2)_* \circ (\sigma_1)_*$.*

*2. Операция обратного образа $\sigma_* : H'(b_1, ..., b_k) \longrightarrow H'(a_1, ..., a_n)$ является гомоморфизмом алгебр скрытых отношений относительно операций сложения и умножения. То есть $\sigma_*(\psi_1 + \psi_2) = \sigma_*(\psi_1) + \sigma_*(\psi_2)$,*

*$\sigma_*(\psi_1\psi_2) = \sigma_*(\psi_1)\sigma_*(\psi_2)$ и $\sigma_*(f\psi_2) = \sigma_*(f)\sigma_*(\psi_2)$, где $\psi_1, \psi_2 \in H'(b_1, ..., b_k)$ — скрытые отношения с набором атрибутов $\{b_1, ..., b_k\}$ и $f$ — наблюдаемая с тем же набором атрибутов.*

*3. Операция прямого образа $\sigma^* : H'(a_1, ..., a_n) \longrightarrow H'(b_1, ..., b_k)$ перестановочна с операцией суммы, то есть $\sigma^*(\varphi_1 + \varphi_2) = \sigma^*(\varphi_1) + \sigma^*(\varphi_2)$, но не сохраняет произведения, то есть, в общем случае $\sigma^*(\varphi_1\varphi_2) \neq \sigma^*(\varphi_1)\sigma^*(\varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in H'(a_1, ..., a_n)$ — скрытые отношения с набором атрибутов $\{a_1, ..., a_n\}$. Однако, если согласование наборов атрибутов $\sigma : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow \{a_1, ..., a_n\}$ сюрьективно, то операция $\sigma^* : H'(a_1, ..., a_n) \longrightarrow H'(b_1, ..., b_k)$ инъективна и перестановочна с произведениями.*

**Утверждение 2.** *Для любого согласования наборов атрибутов $\sigma : B \longrightarrow A$ и любых скрытых отношений $\psi \in H'(B)$ и $\varphi \in H'(A)$ с конечными носителями и с наборами атрибутов $B = \{b_1, ..., b_k\}$ и $A = \{a_1, ..., a_n\}$, соответственно, выполняется следующее равенство:*

$$\sigma^*(\sigma_*(\psi)\varphi) = \psi\sigma^*(\varphi).$$

**Доказательство.** Доказательство утверждения 2 проводитсся непосредственной проверкой равенства по определению операций. Пусть $d'_B : \{b_1, ..., b_k\} \longrightarrow D'_{b_1} \cup ... \cup D'_{b_k}$ — произвольная строка из декартого произведения $D'_{b_1} \cup ... \cup D'_{b_k}$, тогда по определениям операций прямого и обратного образа скрытого отношения, а также из свойства дистрибутивности умножения относительно сложения, из левой части равенства утверждения 2 на этой строке получаем:

$$\begin{aligned}(\sigma^*(\sigma_*(\psi)\varphi))(d'_B) = 0 + \sum_{\substack{d' \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \\ d'\sigma = d'_B}} (\sigma_*(\psi)\varphi)(d') = \\ = 0 + \sum_{\substack{d' \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \\ d'\sigma = d'_B}} \psi(d'_B)\varphi(d') = \psi(d'_B)(0 + \sum_{\substack{d' \in D'_{a_1} \times ... \times D'_{a_n} \\ d'\sigma = d'_B}} \varphi(d')) = \\ = \psi(d'_B)(\sigma^*(\varphi))(d'_B).\end{aligned} \qquad (2)$$

В результате получаем значение правой части равенства утверждения 2 на строке $d'_B$.

Все введенные до сих пор операции переводили скрытые отношения в расширении доменов $p' : D'_a \longrightarrow D_a$ в скрытые отношения либо в том же расширении, либо в наблюдаемых доменах $D_a$ и, возможно, с другим набором атрибутов. Следующие операции выполняются над скрытыми отношениями в разных расширениях.

Уточним обозначения.

Пусть $S = \{s_1, ..., s_l\}$ — множество типов атрибутов. Для каждого типа атрибута $s_i \in S$ задан домен этого типа атрибутов $D_{s_i}$.

Набор атрибутов — это конечное множество $A$ вместе с отображением $type_A : A \longrightarrow S$. Область значения (домен) атрибута $a \in A$ определяется типом атрибута $type(a) \in S$. По определению $D_a = D_{type(a)}$.

Согласование наборов атрибутов $B$ и $A$ — это отображение множеств атрибутов $\sigma : B \longrightarrow A$, сохраняющее типы атрибутов, то есть отображение $\sigma$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sigma} & A \\ type_B \searrow & & \swarrow type_A \\ & S & \end{array}$$

В диаграмме выполняется равенство $type_B = type_A \circ \sigma$.

Обозначим через $D$ разъединенное объединение доменов атрибутов для всех типов, то есть $D = D_{s_1} \sqcup ... \sqcup D_{s_l}$. Отображение $type_D : D \longrightarrow S$ задается равенством $type(d) = s_i$, если $d \in D_{s_i}$.

Расширением домена $D$ называется $S$-множество $D'$ (то есть множество $D'$ и отображение $type_{D'} : D' \longrightarrow S$) вместе с отображением $p' : D' \longrightarrow D$, сохраняющим типы элементов (то есть для которого выполняется равенство $type_{D'} = type_D \circ p'$).

Отображением расширений $\alpha : D' \longrightarrow D''$ домена $D$ называется отображение $\alpha$, для которого коммутативна диаграмма отображений:

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\alpha} & D'' \\ p' \searrow & & \swarrow p'' \\ & D & \end{array}$$

В общем случае, пользователю базы данных со скрытыми отношениями в расширенных доменах могут быть недоступны строки отношений, но он может обрашаться к отношениям, расширениям доменов и отображениям между ними по именам и строить из них новые домены и отображения между ними с помощью операций композиций отображений, декартого произведения, объединения и т. д. Здесь мы будем предполагать, что доступная пользователю категория расширений домена D вместе с категорными операциями над ними образует алгебраический топос $Top[D^{(1)}, ..., D^{(n)}; \alpha_1, ..., \alpha_k]$ — подтопос в топосе всех расширений $S$-множества $D$ и отображений между ними, порожденный конечным набором расширений $D^{(1)}, ..., D^{(n)}$ и отображений $\alpha_1, ..., \alpha_k$.

Из теории топосов конечных множеств известно [2], что подтопос $Top[D^{(1)}, ..., D^{(n)}; \alpha_1, ..., \alpha_k] \subset Finset_D[D^{(1)}, ..., D^{(n)}]$ в топосе всех конечных $D$-множеств и всех $D$-отображений между ними, порожденный набором $D$-множеств $D^{(1)}, ..., D^{(n)}$, определяется подгруппой $H$ в группе всех $D$-биекций множества $D' = D^{(1)} \sqcup ... \sqcup D^{(n)}$, переводящих элементы $D^{(i)}$ в элементы $D^{(i)}$ и являющихся симметриями отображений $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Согласно теории отображение тогда и только тогда принадлежит подтопосу, когда оно симметрично относительно всех биекций из группы $H$. Эту группу будем называть группой внутренней симметрии для скрытых отношений.

Введем несколько новых предположений, связывающих группу внутренней симметрии скрытых отношений с группой всех перестановок элементов наблюдаемого домена D, сохраняющих типы элементов.

Через $G_D$ обозначим группу всех перестановок элементов наблюдаемого домена $D$, сохраняющих типы элементов.

Будем предполагать, что каждая перестановка $g : D \longrightarrow D$ элементов домена $D$ поднимается до некоторой биекции (перестаноки элементов) $g' : D' \longrightarrow D'$ в расширении домена $D'$ так, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & D' & \xrightarrow{g'} & D' & \\ p' & \downarrow & & \downarrow & p' \\ & D & \xrightarrow{g} & D & \end{array}$$

Такие биекции $g'$ вместе с элементами группы симметрии $H$ образуют группу, которую мы обозначим через $G'_{D'}$, и $\pi : G'_{D'} \longrightarrow G_D$ — гомоморфизм гупп такой, что $\pi(g') = g$, где $g'$ и $g$ — элементы предыдущей диаграммы.

Пусть $g' \in G'_{D'}$ — биекция расширения $D' = D^{(1)} \sqcup ... \sqcup D^{(n)}$. домена $D$. Будем предполагать, что для любой образующей $\alpha_i$ топоса $Top[D^{(1)}, ..., D^{(n)}; \alpha_1, ..., \alpha_k]$ выполняется равенство $g'\alpha_i g'^{-1}$. Отсюда следует, что для группы симметрии этого топоса выполняется равенство $g'Hg'^{-1} = H$ для любого $g' \in G'_{D'}$. То есть подгруппа $H \subset G'_{D'}$ является нормальным делителем. Будем предпологать также, что фактор группа $G'_{D'}/H = G_D$. Грубо говоря, это условие означает, что группа симметрии $H$ транзитивно действует в слоях расширения домена.

Рассмотрим теперь операции над скрытыми отношениями, соответствующие топосным операциям над расширениями наблюдаемого домена в топосе $Top[D^{(1)}, ..., D^{(n)}; \alpha_1, ..., \alpha_k]$.
************************************

**Замечание.** *Работа не завершена. Далее приводится отрывок из моей работы, где под гладкими скрытыми отношениями понимаются гладкие функции на расширенных доменах. которые являются гладкими многообразиями.*

**Op8. Внешняя сумма скрытых отношений.** Пусть $\varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$ и $\varphi_2(a_1, \ldots, a_n)$ два скрытых отношения, соответственно, в расширениях $p^1 : D^{(1)} \longrightarrow D$ и $p^2 : D^{(2)} \longrightarrow D$. Внешней или прямой суммой этих отношений называется скрытое отношение $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ с тем же набором переменных, но в расширении $p^1 \sqcup p^2 : D^{(1)} \sqcup D^{(2)} \longrightarrow D$, где $D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$ - разъединенное объединение расширений $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ домена $D$. Как функция скрытое отношение $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ совпадает с функцией $\varphi_1$ на подмножестве $D' \times \ldots \times D' \subset (D' \cup D'') \times \ldots \times (D' \cup D'')$, с функцией $r_2$ на подмножестве $D'' \times \ldots \times D'' \subset (D' \cup D'') \times \ldots \times (D' \cup D'')$ и равна нулю на остальных элементах декартовой степени $(D' \cup D'') \times \ldots \times (D' \cup D'')$.

Операция внешней суммы соответствует логической операции “или"над скрытыми отношениями, получаемых в разных экспериментах. При этом берется ненаблюдаемая часть как первого, так и второго экспериментов.

Пусть $(D', \mu')$ и $(D'', \mu'')$ - два расширения пространства состояний $(D, \mu)$, где $\pi_1 : D' \longrightarrow D$ и $\pi_2 : D'' \longrightarrow D$ - расслоения геометрических представлений группы $S'$ над $D$. Обозначим через $D' \times D''$ - произведение расслоений над D, состоящее из всех пар $(d', d'') \in D' \times D''$, у которых $\pi_1(d') = \pi_2(d'')$. Через $\pi : D' \times D'' \longrightarrow D$ обозначим отображение заданное формулой $\pi(d', d'') = \pi_1(d') = \pi_2(d'')$. Нетрудно видеть, что построенное отображение $\pi$ задает гладкое расслоение над $D$. Более того, оно является геометрическим представлением группы $S'$ над $D$, в котором группа $S'$ действует покоординатно, то есть, если $g \in S'$ и $(d', d'') \in D' \times D''$, то $g(d', d'') = (g(d'), g(d''))$.

Определим на геометрическом представлении $D' \times D''$ внешнюю дифференциальную форму объема $\mu' \wedge \mu''$. Так как локально формы $\mu'$ и $\mu''$ имеют вид $\mu'(x, y') = \mu(x) \wedge \mu'_x(y')$ и $\mu''(x, y'') = \mu(x) \wedge \mu''_x(y'')$, где $\mu'_x(y')$ и $\mu''_x(y'')$ - внешние дифференциальные формы объемов в слоях соответствующих расслоений, то формула

$$\mu' \wedge \mu''(x, y', y'') = \mu(x) \wedge \mu'_x(y') \wedge \mu''_x(y'')$$

корректно определяет форму объема на $D' \times D''$. Нетрудно видеть, что пара $(D' \times D'', \mu' \wedge \mu'')$ задает расширение пространства состояний $(D, \mu)$, слоем которого является декартово произведение слоев соответствующих расширений, а форма объема в слое является внешним произведением форм объемов в соответствующих слоях.

Операция внешнего произведения. Если $r_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $r_2(x_1, \ldots, x_n)$ - гладкие скрытые отношения в расширениях $(D', \mu')$ и $(D'', \mu'')$ соответственно, с одинаковыми наборами переменных, то их внешним произведением $r_1 \wedge r_2$ называется гладкое скрытое отношение в расширении $(D' \times D'', \mu' \wedge \mu'')$ с тем же набором переменных, которое как функция имеет значение на строке $((d'_1, d''_1), \ldots, (d'_n, d''_n))$, где $(d'_i, d''_i) \in D' \times D''$, равное произведению чисел $r_1(d'_1, \ldots, d'_n)$ и $r_2(d''_1, \ldots, d''_n)$.

Внешнее произведение скрытых отношений соответствует логической операции "и"над гладкими скрытыми отношениями, полученными в разных экспериментах. При этом предполагается независимость параметров, определяющих внутренние состояния наблюдаемых объектов.

Заметим, что так как $\mu' \wedge \mu'' = (-1)^{dimF' \cdot dimF''} \mu'' \wedge \mu'$, то внешнее произведение гладких скрытых отношений в общем случае зависит от порядка сомножителей.

Этим исчерпывается описок операций над скрытыми отношениями и, тем самым, определена "алгебра"гладких скрытых отношений. Отличие ее от обычных алгебр состоит в том, что ее основания образуют класс, а не множество. Однако нас интересуют скрытые отношения с точностью до эквивалентности (которая определяется ниже) и это сильно упрощает дело.

Прежде, чем дать определение эквивалентности двух гладких скрытых отношений, обсудим, что мы будем понимать под изоморфизмом двух расширений $(D', \mu')$ и $(D'', \mu'')$ данного пространства состояний $(D, \mu)$. В этой работе мы фиксировали $S'$ - расширение группы преобразований $S$, что на физическом уровне означает, что имеются некоторые физические средства, позволяющие отличить одно преобразование $g_1 \in S'$ от другого $g_2 \in S'$, действующих на расширениях пространства состояний, хотя мы не всегда можем отличить один элемент в $D'$ от другого и даже не всегда можем отличить разные расширения. Это приводит нас к следующему определению изоморфизма расширений $(D', \mu')$ и $(D'', \mu'')$.

Отображение $\alpha : D' \longrightarrow D''$ называется изоморфизмом расширений $(D', \mu')$ и $(D'', \mu'')$, если оно является $S'$ - эквивариантным гладким отображением пространств, переводит внешнюю дифференциальную форму

$\mu'$ в форму $\mu''$, и коммутативна следующая диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & D'' \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Скрытые отношения $r_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $r_2(x_1, \ldots, x_n)$ в расширениях $(D', \mu')$ и $(D'', \mu'')$ называются эквивалентными относительно изоморфизма расширений $\alpha : D' \longrightarrow D''$, если внешняя форма $r_2(x_1, \ldots, x_n)\mu''(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu''(x_n)$ при отображении $\alpha \times \ldots \times \alpha : D' \times \ldots \times D' \longrightarrow: D'' \times \ldots \times D''$ переходит во внешнюю форму $r_1(x_1, \ldots, x_n)\mu'(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu'(x_n)$.

Для примера применения понятия эквивалентности гладких скрытых отношений рассмотрим частный случай внешнего произведения скрытых отношений, когда одно из расширений совпадает с пространством состояний $(D, \mu)$. Пусть $a(x_1, \ldots, x_n)$ гладкое отношение в $(D, \mu)$ и $r(x_1, \ldots, x_n)$ гладкое отношение в расширении $(D', \mu')$. По определению внешнего произведения гладкое скрытое отношение $a \wedge r$ лежит в расширении $(D \times D', \mu \wedge \mu')$, которое изоморфно $(D', \mu')$. Нетрудно заметить, что скрытые отношения $a \wedge r$ и $a \cdot r$, определенные раньше, эквивалентны.

Интересно было бы рассмотреть изоморфизмы расширения $(D', \mu')$ с самим собой. В частности, естественно было бы предположить, что преобразования из группы внутренней симметрии $H$ являются изоморфизмами. Это предположение накладывает сильные ограничения на расширение $S'$ группы $S$.

У т в е р ж д е н и е 2.1. Если для некоторого расширения $(D', \mu')$ группа $S'$ эффективно действует на пространстве $D'$ и элементы $h : D' \longrightarrow D'$ подгруппы внутренней симметрии $h \in H$ являются изоморфизмами расширения $(D', \mu')$, то $H$ – коммутативная группа, и $1 \longrightarrow H \longrightarrow S' \longrightarrow S \longrightarrow 1$ является центральным расширением группы $S$ с помощью группы $H$.

Доказательство утверждения основано на том, что по определению изоморфизма расширений отображение $h : D' \longrightarrow D'$ должно быть $S'$ - эквивариантным отображением, то есть для любого элемента $g \in S'$ должно выполняться равенство $h \cdot g = g \cdot h$, а так как $h$ любой элемент из $H$, то это означает, что $S'$ - центральное расширение группы $S$ с помощью группы $H$.

В дальнейшем в этой статье будет предполагаться, что $S'$ - центральное расширение группы $S$. При этом предположении нетрудно видеть, что преобразования из группы внутренней симметрии $H$ являются изоморфизмами расширений пространства состояний.

З а м е ч а н и е. Принятое предположение о группе $S'$ у нас явилось следствием фиксированности и полной наблюдаемости этой группы. Развитие принятого здесь подхода на случай, когда группы внутренней симметрии ненаблюдаемы и зависят от эксперимента, оставляется для другой статьи.

В заключение этого раздела определим действие группы $S'$ на скрытые отношения.

Пусть $r(x_1, \ldots, x_n)$ - скрытое отношение в расширении $(D', \mu')$, и $g$ - преобразование пространства $D'$ из группы преобразований $S'$. Обозначим через $g(r)$ гладкое скрытое отношение в расширении $(D', g(\mu'))$ с тем же набором переменных, что и у $r$, которое как функция задается следующим равенством:

$$g(r)(x_1, \ldots, x_n) = r(g^{-1}(x_1), \ldots, g^{-n}(x_n)).$$

Нетрудно проверить, что это определение задает действие группы $S'$ на множестве гладких скрытых отношениях в том смысле, что для любого гладкого скрытого отношения $r$ действие единичного элемента группы $S'$ оставляет его неподвижным, а композиция действий любых двух элементов $g_1, g_2 \in S'$ на скрытое отношение $r$ равна действию произведения $g_1 \cdot g_2$ на это же отношение.

У т в е р ж д е н и е 2.2. Действие преобразования $g \in S'$ на гладкие скрытые отношения коммутирует с операциями, определенными выше над гладкими скрытыми отношениями, то есть действие $g$ на алгебре гладких скрытых отношений над пространством состояний $(D, \mu)$ является изоморфизмом этой алгебры.

Доказательство этого утверждения прямо следует из определений операций и преобразования $g \in S'$ над гладкими скрытыми отношениями.

Гладкое скрытое отношение $r$ будем называть инвариантным относительно преобразования $g \in S'$, если отношение $g(r)$ эквивалентно отношению $r$, и эта эквивалентность порождается некоторым изоморфизмом $h$, принадлежащим группе внутренней симметрии $h \in H$. Другими словами, $r$ инвариантно относительно $g \in S'$, если выполняется следующее равенство для дифференциальных форм $g(r \cdot \mu') = h(r \cdot \mu')$ или, что то же самое, если выполняется равенство $h^{-1}(g(r\mu')) = r\mu'$ для некоторого $h \in H$.

Пусть $G \subset S$ - подгруппа, задающая логическую структуру некоторой физической системы на пространстве состояний $(D, \mu)$. Через $G'$ обозначим прообраз группы $G$ в группе $S'$ относительно гомоморфизма расширения $p : S' \longrightarrow S$. Группа $G'$ является расширением группы $G$ с помощью группы внутренней симметрии $H$. Полученная группа называется группой симметрии отношений модели данной физической системы в алгебре скрытых отношений.

В моделировании данной физической системы в алгебре скрытых отношений инвариантные относительно подгруппы $G' \subset S'$ скрытые отношения играют ту же роль, что в классических моделях обычные отношения, симметричные относительно подгруппы $G \subset S$.

Ввиду особой важности понятия скрытого отношения, инвариантного относительно подгруппы $G'$, для задач моделирования физических систем, выделим это понятие в следующем определении.

О п р е д е л е н и е . Гладкое скрытое отношение $r(x_1, \ldots, x_n)$ в расширении $(D', \mu')$ будем называть инвариантным относительно подгруппы $G' \subset S'$, если для любого гладкого параметрического семейства преобразований $g_s \in G'$, где параметр $s$ пробегает некоторую область $V$ $k$-мерного евклидового пространства, и любого значения параметра $s_0 \in V$ найдется такое гладкое параметрическое семейство преобразований $h_s \in H$, где $H \subset G'$ – подгруппа скрытой симметрии, для $s$, принадлежащих некоторой окрестности $U \subset V$ точки $s_0 \in U$, что в окрестности $U$ выполняется следующее равенство между внешними дифференциальными формами :

$$g_s(r(x_1, \ldots, x_n)\mu'(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu'(x_n)) = h_s(r(x_1, \ldots, x_n)\mu'(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu'(x_n))$$

Рассмотрим следствия этого определения. Интегрируя дифференциальные формы, входящие в определение, по слоям расслоения $D' \longrightarrow D$ получим, что из существования гладкого скрытого отношения относительно подгруппы $G' \subset S'$ следует существование инвариантной дифференциальной формы на $D$ относительно подгруппы $G \subset S$. Обычно, мера $\mu$ на пространстве состояний $D$ задается такой инвариантной внешней дифференциальной формой. В этом случае по определению расширения $(D', \mu')$ пространства состояний $(D, \mu)$ форма $\mu'$ должна быть инвариантной относительно группы преобразований $G'$, так как форма $\mu'$ преобразуется так же, как и форма $\mu$. Отсюда следует, что равенство в определении инвариантного скрытого отношения эквивалентно равенству функций $r(g_s^{-1}(x_1),\ldots,g_s^{-1}(x_n)) = r(h_s^{-1}(x_1),\ldots,h_s^{-1}(x_n))$, рассмотренному на носителе формы $\mu'(x_1)\wedge\ldots\wedge\mu'(x_n)$.

У т в е р ж д е н и е 2.3. Для любой гладкой действительной функции $f : D\times\ldots\times D \longrightarrow R$, определенной на декартовой степени пространства состояний $D$, и любого гладкого скрытого отношения $r(x_1,\ldots,x_n)$, инвариантного относительно подгруппы $G' \subset S'$, выполняется равенство $< fr >=< fg(r) >$, где $g \in G'$, и $<>$ - операция усреднения скрытого отношения по всем переменным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $r$ - инвариантное скрытое отношение, то найдется такое преобразование $h \in H$, что $g(r) = h(r)$. Отсюда получаем следующие равенства

$$< fg(r) >=< f\cdot h(r) >=< h(f\cdot r) >=< fr >,$$

где предпоследнее равенство следует из-за постоянства функции $f$ вдоль слоев расширения пространства состояний и того, что преобразование $h \in H$ отображает каждый слой в себя, а последнее равенство следует из неизменности среднего веса скрытого отношения при действии на скрытые отношения элементов группы $S'$.

В моделировании физических систем в алгебре скрытых отношений функция $f$ утверждения 2.3 рассматривается как некоторая наблюдаемая на пространстве состояний системы. Таким образом, само утверждение 2.3 может трактоваться, как независимость средней величины $< fr >$ любой наблюдаемой $f$ на инвариантном скрытом отношении $r$ от того, какой представитель инвариантного скрытого отношения берется: $r$ или $g(r)$, для $g \in G'$.

З а м е ч а н и е. В общем случае, инвариантные относительно подгруппы $G' \subset S'$ скрытые отношения не образуют подалгебру в алгебре скрытых отношений. Так, например, сумма инвариантных отношений может быть неинвариантным отношением. Это необходимо иметь в виду при моделировании физических систем в алгебре скрытых отношений.

****************************************

# Список литературы

[1] Мейер Д. Теория реляционных баз данных. Из-во М.: ”Мир”, 1987.

[2] Бениаминов Е.М. Алгебраические методы в теории баз данных и представлении знаний. Из-во М.:"Научный мир 2003.