Конечно аппроксимируемые множества

Е.М. Бениаминов
ebeniamin@yandex.ru

Аннотация

В этой статье вводится определение и изучаются свойства конечно аппроксимируемых множеств. Это множества (в общем случае бесконечные), которые в каждый момент времени приближенно можно представить конечными множествами. Предолагается, что с такими множествами удобно работать на компьютере и, следовательно, в некоторых приложениях было бы естественно рассматривать модели теорий не в обычных множествах, а в категории конечно аппроксимируемых множеств. Статья посвящена изучению этой структуры.

1 Введение

2 Мотивация

В различных моделях исследуемых объектов и систем приходится иметь дело с бесконечными множествами. При представлении таких моделей на компьютерах возникают известные трудности, связанные с конечностью памяти компьютеров и времени их работы.

Простым примером этой проблемы является использование типов данных в программировании. В общем случае, типы данных (целые числа, действительные числа, списки, деревья и т. д.) являются бесконечными множествами. В программах мы имеем дело с конечным числом элементов этих типов. Причем длина этих элементов ограничивается возможностями технических средств и средой программирования.

На примере инициальных моделей абстрактных типов данных, рассмотренных как фактор множеств термов [1], в еще большей мере видны проблемы использования таких моделей в системах на компьютерах.

Инициальные модели абстрактных типов данных в общем случае являются алгебрами с бесконечным числом элементов и неразрешимой проблемой эквивалентности термов и, поэтому, в полной мере не могут быть представлены в компьютере.

Выходом в этом случае является принятие тезиса, что в практических задачах не понадобятся все элементы модели, и в каждый момент времени нас может удовлетворить конечный фрагмент модели и неполное знание о равенстве между термами в модели.

Хорошим примером такого выхода является использование конечных множеств машинных чисел вместо бесконечных множеств целых или вещественных чисел — моделей соответствующих типов данных.

Эта позиция толкает на изменение взгляда на множества в приложениях к computer science: вместо актуально бесконечных множеств будем рассматривать потенциально бесконечные множества, то есть развивающиеся во времени множества, конечные в каждый момент времени. По аналогии с машинными числами, вместо бесконечных множеств мы будем рассматривать конечно аппроксимируемые множества, то есть множества, которые в каждый момент времени представляются конечными множествами, между элементами которых задано отношение аппроксимации.

3 Основные определения

Прежде, чем дать формальное определение конечно аппроксимируемого (развивающегося) множества, уточним, что здесь будет пониматься под временем. В качестве времени можно было бы взять множество натуральных чисел N с естественным порядком на нем, но в некоторых случаях удобнее в качестве времени рассматривать любое направленное множество Γ, в котором есть конфинальное подмножество, изоморфное $\{\gamma_n : n \in N\}$.

Более точно. Пусть Γ — множество, и $<$ — бинарное отношение порядка на нем, удовлетворяющее следующим свойствам:

для любых двух элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ существует $\gamma_3 \in \Gamma$ такое, что $\gamma_1 < \gamma_3$ и $\gamma_2 < \gamma_3$;

существует бесконечная последовательность элементов $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$ такая, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ найдется такой элемент γ_i в этой последовательности, что $\gamma < \gamma_i$.

Подмножество $\Gamma' \subset \Gamma$ называется конфинальным в Γ, если для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ найдется элемент $\gamma' \in \Gamma'$, что $\gamma < \gamma'$.

Определение 1. *Предразвивающимся множеством X называется последовательность конечных множеств $X = \{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ вместе с бинарными отношениями аппроксимации $\prec$ между элементами конечных множеств X_{γ_1} и X_{γ_2}, для $\gamma_1 < \gamma_2$. Причем эти отношения должны удовлетворять следующему условию:*

A1. *(тразитивность) Если $x_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i}$, $x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2}$ и $x_{\gamma_2} \prec x_{\gamma_3}$, то $x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_3}$. То есть, если элемент $x_{\gamma_2} \in X_{\gamma_2}$ аппроксимирует элемент $x_{\gamma_1} \in X_{\gamma_1}$, а элемент $x_{\gamma_3} \in X_{\gamma_3}$ аппроксимирует элемент x_{γ_2}, то элемент x_{γ_3}, должен аппроксимиировать элемент x_{γ_1}.*

Чтобы ввести еще дополнительные условия на предразвивающиеся множества и определить развивающиеся конечно аппроксимируемые множества, нам потребуются вспомогательные понятия.

Определение 2. *Квазиэлементом предразвивающегося множества X называется последовательность аппроксимирующих друг друга элементов $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$ для конфинального подмножества $\{\gamma_1, \gamma_2, ...\}$ в Γ. Два квазиэлемента x и x' назовем совпадающими, если x и x' как последовательности совпадают, начиная с некоторого номера k, т. е. $x_{\gamma_i} = x'_{\gamma_i}$, при $i > k$. В дальнейшем мы не будем различать совпадающие квазиэлементы.*

Если x — квазиэлемент предразвивающегося множества X в смысле введенного выше определения, то обозначаться это будет обычным значком принадлежности $x \in X$, как для обычных множеств.

Замечание. *Определение квазиэлемента здесь соответсвует идее интуиционисткой математики (см., например, [2]) о свободно становящихся последовательностях Браура.*

Определение 3. *Окрестностью $O(x_\gamma)$ для $x_\gamma \in X_\gamma$ называется множество вида*

$$O(x_\gamma) = \{x_{\gamma'} | \text{ для всех } \gamma' > \gamma;\ x_{\gamma'} \in X_{\gamma'};\ x_\gamma \prec x_{\gamma'}\}.$$

Будем говорить, что последовательность $y = \{y_{\gamma'_1}, y_{\gamma'_2}, ...\}$, где $y_{\gamma'_i} \in X_{\gamma'_i}$, для конфинального подмножества $\{\gamma'_1, \gamma'_2, ...\}$ в Γ, лежит в окрестности $O(x_\gamma)$, если все элементы последовательности y, начиная с некоторого номера, принадлежат окрестности $O(x_\gamma)$.

Определение 4. *Последовательность $y = \{y_{\gamma'_1}, y_{\gamma'_2}, ...\}$, где $y_{\gamma'_i} \in X_{\gamma'_i}$, для конфинального подмножества $\{\gamma'_1, \gamma'_2, ...\}$ в Γ называет-*

ся последовательностью Коши или фундаментальной последовательностью, если для любого $\gamma' \in \Gamma$ существуют такое $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' < \gamma$, и такой элемент $x_\gamma \in X_\gamma$, что последовательность y лежит в окрестности $O(x_\gamma)$.

Очевино, что любой квазиэлемент является фундаментальной последовательностью в силу свойства транзитивности отношения аппроксимации (**A1**).

О п р е д е л е н и е 5. *Предразвивающееся множество X называется развивающимся, если его отношения аппроксимации удовлетворяют следующим дополнительным условиям:*

A2. *(стабильность) Для каждого квазиэлемента $y \in X$ и любой окрестности $O(x_\gamma)$, содержащей y, найдется такое большое $\gamma_N \in \Gamma$, что $\gamma_N > \gamma$, и для любого конфинального подмножества $\Gamma' \subset \Gamma$ найдутся такие $\gamma' > \gamma_N$ и такой элемент $x_{\gamma'} \in X_{\gamma'}$, что $\gamma' \in \Gamma'$, выполняется отношение аппроксимации $x_\gamma \prec x_{\gamma'}$, и окрестность $O(x_{\gamma'})$ содержит квазиэлемент y.*

A3. *(открытость окрестностей) Для каждого квазиэлемента $y \in X$ и любых окрестностей $O(x_{\gamma_1})$ и $O(x_{\gamma_2})$, содержащих y, найдется такое большое $\gamma_N \in \Gamma$, что $\gamma_N > \gamma_1$ и $\gamma_N > \gamma_2$, и если для $\gamma' > \gamma_N$ окрестнось $O(x_{\gamma'})$ содержит y и $x_{\gamma_2} \prec x_{\gamma'}$, то $x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma'}$.*

Условия **A2** и **A3** могут быть усилены с квазиэлементов y на фундаментальные последовательности.

О п р е д е л е н и е 6. *Предразвивающееся множество X называется полным развивающимся множеством, если его отношения аппроксимации вместо условий* **A2** *и* **A3** *удовлетворяют более сильным условиям:*

A2'. *(стабильность для фундаментальных последовательностей) Для каждой фундаментальной последовательности $y \in X$ и любой окрестности $O(x_\gamma)$, содержащей y, найдется такое большое $\gamma_N \in \Gamma$, что $\gamma_N > \gamma$, и для любого конфинального подмножества $\Gamma' \subset \Gamma$ найдутся такие $\gamma' > \gamma_N$ и такой элемент $x_{\gamma'} \in X_{\gamma'}$, что $\gamma' \in \Gamma'$, выполняется отношение аппроксимации $x_\gamma \prec x_{\gamma'}$, и окрестность $O(x_{\gamma'})$ содержит фундаментальную последовательность y.*

A3'. *(открытость окрестностей для фундаментальных последовательностей) Для каждой фундаментальной последовательности $y \in X$ и любых окрестностей $O(x_{\gamma_1})$ и $O(x_{\gamma_2})$, содержащих y, найдется такое большое $\gamma_N \in \Gamma$, что $\gamma_N > \gamma_1$ и $\gamma_N > \gamma_2$, и если для $\gamma' > \gamma_N$ окрестность $O(x_{\gamma'})$ содержит y и $x_{\gamma_2} \prec x_{\gamma'}$, то $x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma'}$.*

Определим теперь отношение равенства на множестве квазиэлементов в развивающемся множестве X.

О п р е д е л е н и е 7. *Квазиэлемент* $x' = \{x'_{\gamma'_1} \prec x'_{\gamma'_2} \prec ...\}$ *называется аппроксимирующим квазиэлемент* $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$ *в развивающемся множестве* X*, если для любого* x_{γ_i} *все члены последовательности* $x'_{\gamma'_j}$ *за исключением конечного числа находятся в отношении аппроксимации* $x_{\gamma_i} \prec x'_{\gamma'_j}$. *Обозначаться это отношение на квазиэлементах развивающегося множества* X *будет также в виде* $x \prec x'$.

Другими словами можно сказать, что квазиэлементы находятся в отношении $x \prec x'$, если квазиэлемент x' лежит в любой окрестности вида $O(x_{\gamma_i})$ для для всех x_{γ_i} из $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$.

О п р е д е л е н и е 8. *Два квазиэлемента* x *и* x' *развивающегося множества* X *называются равными* $x = x'$*, если между этими квазиэлементами одновременно выполняются отношения* $x \prec x'$ *и* $x' \prec x$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Введенное в предыдущем определении отношение равенства на квазиэлементах развивающегося множества является отношением эквивалентности.*

Рефлексивность, симметричность и транзитивность введенного отношения равенства на квазиэлементах прямо следуют из его определения и свойства транзитивности **A1** отношений аппроксимации между элементами конечных множеств конечно аппроксимируемого множества X.

Из определений также непосредственно выводится следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если квазиэлемент* x' *конечно аппроксимируемого множества* X *получен как подпоследовательность квазиэлемента* $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$ *по некоторому конфинальному подмножеству в* $\{\gamma_1 < \gamma_2 < ...\}$, *то* $x = x'$.

Условие **A2** обеспечивает выполнение следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 3. *Для любого квазиэлемента* $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$ *в развивающемся множестве* $X = \{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *и любого конфинального подмножества* $\Gamma' \subset \Gamma$ *существует квазиэлемент* x' *по конфинальному подмножеству в* $\{\gamma'_1 < \gamma'_2 < ...\} \subset \Gamma'$, *равный квазиэлементу* x.

Доказательство утверждения 3 основано на свойстве **A2**, согласно которому можно последовательно строить элементы $x'_{\gamma'_{i_1}} \prec x'_{\gamma'_{i_2}} \prec ... \prec x'_{\gamma'_{i_k}} \prec ...$, где элементы $\gamma'_{i_1}, \gamma'_{i_2}, ...\gamma'_{i_k} ...$ могут браться из любого конфинального подмножества в Γ, и при этом делать это так, чтобы выполнялись отношения

$$x_{\gamma_1} \prec x'_{\gamma'_{i_1}} \prec x_{\gamma_{j_1}} \prec x'_{\gamma'_{i_2}} \prec x_{\gamma_{j_2}} \prec ... \prec x'_{\gamma'_{i_k}} \prec x_{\gamma_{j_k}} \prec ...,$$

где $\{x_{\gamma_{j_1}} \prec x_{\gamma_{j_2}} \prec ...\}$ – это некоторая подпоследовательность в $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$. Отсюда и из определения равенства квазиэлементов следует утверждение 3.

Условие **A3** обеспечивает выполнение следующего утверждения.

Утверждение 4. *Если квазиэлемент $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$ в развивающемся множестве X аппроксимируется квазиэлементом $x' = \{x'_{\gamma'_1} \prec x'_{\gamma'_2} \prec ...\}$, то есть $x \prec x'$, то $x = x'$.*

В соответсвии с определением 8 для доказательства равенства $x = x'$ осталось доказать, что $x' \prec x$. То есть нужно доказать, что для каждого $x'_{\gamma'_i}$ из x' существует x_{γ_j} из x, что $x'_{\gamma'_i} \prec x_{\gamma_j}$. Для доказательсва последнего утверждения воспользуемся свойством **A3**, в котором вместо квазиэлемента y возьмем x', вместо x_{γ_1} и x_{γ_2} элементы $x'_{\gamma'_i}$ и $x_{\gamma_{j-1}}$, соответственно. Тогда по условию утверждения 4, условия свойства **A3** выполняются, и в соответствии с этим свойством существует такое большое γ_j и элемент x_{γ_j} в x, что $x'_{\gamma'_i} \prec x_{\gamma_j}$. Что и требовалось.

Определение 9. *Пределом последовательности Коши $y = \{y_{\gamma'_1}, y_{\gamma'_2}, ...\}$ (см. Определение 4) в развивающимся множестве X называется такой его квазиэлемент $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$, что каждая окрестность вида $O(x_{\gamma_i})$ содержит последовательность y.*

Свойство **A2'** обеспечивает существование предела для любой фундаментальной последовательности в полном развивающемся множестве.

Утверждение 5. *Для каждой фундаментальной последовательности $y = \{y_{\gamma'_1}, y_{\gamma'_2}, ...\}$ в полном развивающемся множестве X существует предел $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$.*

Предел, требуемый в утверждении 5, непосредственно строится по свойству **A2'**.

Утверждение 6. *Если квазиэлементы $x = \{x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2} \prec ...\}$ и $x' = \{x'_{\gamma'_1} \prec x'_{\gamma'_2} \prec ...\}$ являются пределами фундаментальной последовательности y в полном развивающемся множестве X, то $x = x'$.*

Доказательство утверждения 6 следует из определений и свойства **A2'**. Для доказательсва нужно показать, например, что $x \prec x'$. То есть доказать, что для любого x_{γ_i} из x существует такой $x'_{\gamma'_j}$ из x', что $x_{\gamma_i} \prec x'_{\gamma'_j}$. Для доказательства этого утверждения воспользуемся свойством **A2'**.

Имеем, так как x и x' – пределы последовательности y, то окрестности $O(x_{\gamma_i})$ и $O(x'_{\gamma'_1})$ содержат последовательность y, и все окрестности $O(x'_{\gamma'_k})$ содержат последовательность y, и при этом $x'_{\gamma'_1} \prec x'_{\gamma'_k}$. Тогда, по свойству **A2'** найдется такое большое γ'_j, что $x_{\gamma_i} \prec x'_{\gamma'_j}$. Утверждение 6 доказано.

4 Примеры конечно аппроксимируемых развивающихся множеств

Рассмотрим некоторые примеры развивающихся множеств.

Пример 1. *Множество целых чисел Z.*

В качестве направленного множества Γ рассматривается множество натуральных чисел N. Конечные множества X_n для $n \in N$ — это подмножества целых чисел вида:

$$X_n = \{x \in Z | -n \leq x \leq n\}.$$

Отношение аппроксимации между элементами этих множеств — это отношение совпадения элементов из разных множеств. Очевидно, что эта конструкция удовлетворяет условиям полного развивающегося множества.

Пример 2. *Множество бесконечных десятичных дробей R.*

В качестве направленного множества Γ также рассматривается множество натуральных чисел N, а в качестве множеств X_n для $n \in N$ — множества положительных и отрицательных десятичных чисел с n десятичными цифрами до запятой и n десятичными цифрами после запятой (дописываются нули до n знаков после запятой). Два числа $x_n \in X_n$ и $x_{n+1} \in X_{n+1}$ связываются отношением аппроксимации $x_n \prec x_{n+1}$, если модуль разности $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-(n+1)}$.

Легко проверяется, что квазиэлементами этого развивающегося множества являются бесконечные десятичные дроби, а отношение равенства в развивающемся множестве соответсвует равенству между бесконечными дробями с девятками в периоде и бесконечными дробями с увеличенной на единицу последней цифрой перед девятками и нулями вместо девяток.

Аналогично можно определить множество бесконечных двоичных дробей. Это будет другое развивающееся множество, представляющее множество действительных чисел. Развивающиеся множества бесконечных десятичных дробей и бесконечных двоичных дробей должны быть изоморфны, но чтобы определить изоморфизм двух развивающихся множеств нужно определить отображения между развивающимися множествами.

Пример 3. *Обратный спектр X конечных множеств.*

В качестве направленного множества Γ рассматривается множество натуральных чисел N, а в качестве множеств X_n некоторые конечные множества, связанные между собой отображениями $f_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$, для $n \in N$. Элемент $x_{n+1} \in X_{n+1}$ связывается отношением аппроксимации с элементом $x_n \in X_n$, только если $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$. Очевидно, что условия полного развивающегося множества здесь выполняются. Квазиэлементами являются нити обратного спектра множеств, которые являются элементами обратного предела спектра X. Этот предел естественно наделяется топологией, и обратный предел конечных множеств является компактом. Топологические пространсва, строящиеся таким способом, используются, например, в алгебраической геометрии. Там они называются проконечными пространствами. Эти же конструкции используются при построении р-адических чисел. Заметим, что, если отображение f_{n+1} не является сюръективным, то некоторые элементы из X_n не продолжаются до квазиэлементов (как бы умирают в развивающемся множестве).

Частным случаем обратного спектра множеств является любое конечное множество X. В этом случае $X_n = X$, для всех $n \in N$, и все f_{n+1} являются тождественными отображениями множества X в себя.

Пример 4. *Прямой спектр X конечных множеств.*

Этот пример отличается от предыдущего направлением отображений. Теперь, отображения $f_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$, для $n \in N$, и элемент $x_{n+1} \in X_{n+1}$ связывается отношением аппроксимации с элементом $x_n \in X_n$, только если $f_n(x_n) = x_{n+1}$. В этом случае также лего проверить выполнимость условий полного развивающегося множества. Множество квазиэлементов в этом случае в математике называется пределом этого прямого спектра множеств.

Пример 5. *Алгебра, заданная образующими и соотношениями.*

Этот пример является частным случаем предыдущего примера.

Рассматривается некоторая сигнатура $\Sigma = \langle T_1, ..., T_n; F_1, ..., F_k \rangle$, где $T_1, ..., T_n$ – имена сортов (типов) алгебры; $F_1, ..., F_k$ – имена операций с указанием откуда и куда действует каждая из этих операций. То есть для каждого $F_i \in \Sigma$, задано выражение $F_i : T_{(i,1)} \times ... \times T_{(i,q_i)} \longrightarrow T_{b_i}$, где q_i – число аргументов операции F_i; $T_{(i,1)}, ..., T_{(i,q_i)}$ – типы аргументов этой операции, а T_{b_i} – тип результата.

Если X – некоторое множество переменных типов $T_1, ..., T_n$, то через $Term(X, \Sigma)$ обозначается множество термов в сигнатуре Σ с переменными из множества X. То есть $Term(X, \Sigma)$ – множество правильно построенных выражений, задающих композицию операций, примененых к переменным из X. Уравнением в сигнатуре Σ называется пара термов $L, R \in Term(X, \Sigma)$ одного типа, которые записываются в виде $L = R$.

Пусть M –некоторое множество, и для каждого элемента этого множесва указывается его тип из набора имен $T_1, ..., T_n$. Множество M рассматривается как множество образующий алгебры. Пусть, кроме того, $E = \{(L_j = R_j) : j = 1, ..., s\}$ – некоторое множество уравнений в сигнатуре Σ, которое рассматривается как множество соотношений алгебры. Тогда на множестве термов $Term(M, \Sigma)$ от элементов множества M и имен операций сигнатуры Σ породим некоторое отношение эквивалентности $\approx_E$, удовлетворяющее следующему свойству. Отношение $\approx_E$ – минимальное отношение эквивалентности, которое является конгруенцией относительно имен операций сигнатуры Σ, и содержащее все пары термов, полученные подстановкой вместо переменных в соотношения из E произвольных термов из $Term(M, \Sigma)$ того же типа, что и переменные.

Алгеброй A, заданной множеством образующих M и множеством соотношений E называется фактор множество термов $Term(M, \Sigma)$ по отношению эквивалентности $\approx_E$, т.е.

$$A = Term(M, \Sigma) / \approx_E .$$

В общем случае A – бесконечное множество, а отношение $\approx_E$ может быть алгоритмически неразрешимым (но всегда алгоритмически перечислимо).

Представим, теперь, алгебру A в виде развивающегося множества.

Рассмотрим направленное множество

$$\Gamma = \{(D, \approx_{ED}) | D \subset Term(M, \Sigma), \quad \approx_{ED} \subset \approx_E\},$$

где D – конечное множество термов, а $\approx_{ED}$ – отношение эквивалентности на D, являющееся конечным подмножеством в $\approx_E$. Если $\gamma_1 = (D1, \approx_{ED1})$ и $\gamma_2 = (D2, \approx_{ED2})$, то положим $\gamma_1 < \gamma_2$, если $D1$ – подмножество в $D2$ и $\approx_{ED1}$ подмножество в $\approx_{ED2}$. Направленное множество Γ содержит последовательность по натуральным числам в виде конфинального подмножества. Действительно, в качестве γ_n можно взять $(Dn, \approx_{EDn})$, где

Dn – множество всех термов глубины меньше или равных n, а $t_1 \approx_{EDn} t_2$ выполняется только тогда, когда существует доказательство $t_1 \approx_E t_2$, использующее только термы из Dn.

Положим для $\gamma_1 = (D1, \approx_{ED1})$ множество $A_{\gamma_1} = D1/\approx_{ED1}$. Если $\gamma_2 = (D2, \approx_{ED2})$ и $\gamma_1 < \gamma_2$, то стандартным образом опредеделяется отображение $f_{\gamma_1}^{\gamma_2} : D1/\approx_{ED1} \longrightarrow D2/\approx_{ED2}$. В результате получаем прямой спектр конечных множеств предыдущего примера, который определяет развивающееся множество.

Перейдем к определению отображениий между развивающимися множествами.

Пусть Γ и Γ' два направленных множества. Декартовым произведением Γ и Γ' называется направленное множество $\Gamma \times \Gamma'$, состоящее из пар элементов (γ, γ'), где $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma'$, с отношением порядка $(\gamma_1, \gamma_1') < (\gamma_2, \gamma_2')$, если $\gamma_1 < \gamma_2$ и $\gamma_1' < \gamma_2'$.

Если $X = \{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ и $Y = \{Y_{\gamma'} : \gamma' \in \Gamma'\}$ — развивающиеся множества по направленным множествам Γ и Γ', то через $Fun(X_\gamma, Y_{\gamma'})$ обозначим множество всех функций из X_γ в $Y_{\gamma'}$ (в том числе и не всюду определенных).

О п р е д е л е н и е 10. *Будем говорить, что между функциями $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \in Fun(X_{\gamma_1}, Y_{\gamma_1'})$ и $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \in Fun(X_{\gamma_2}, Y_{\gamma_2'})$ для $(\gamma_1, \gamma_1') < (\gamma_2, \gamma_2')$ выполняется слабое отношение аппроксимации $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec' f_{\gamma_2,\gamma_2'}$, если для любых двух элементов $x_{\gamma_1} \in X_{\gamma_1}$ и $x_{\gamma_2} \in X_{\gamma_2}$ (из областей определения функций $f_{\gamma_1,\gamma_1'}$ и $f_{\gamma_1,\gamma_1'}$, сответственно), находящихся в отношении аппроксимации $x_{\gamma_1} \prec x_{\gamma_2}$, выполняется также и отношение аппроксимации между значениями функций от этих элементов $f_{\gamma_1,\gamma_1'}(x_{\gamma_1}) \prec f_{\gamma_2,\gamma_2'}(x_{\gamma_2})$. Будем говорить, что между этими функциями выполняется отношение аппроксимации $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec f_{\gamma_2,\gamma_2'}$, если между ними выполняется отношение слабой аппроксимации $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec' f_{\gamma_2,\gamma_2'}$, и для лубых функций $f_{\gamma_3,\gamma_3'}$, находящихся в отношении слабой аппроксимации $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec' f_{\gamma_3,\gamma_3'}$ с $f_{\gamma_2,\gamma_2'}$, выполняется также и отношение слабой аппроксимации $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec' f_{\gamma_3,\gamma_3'}$ с $f_{\gamma_1,\gamma_1'}$.*

У т в е р ж д е н и е 7. *Последовательность конечных множеств $Fun(X, Y) = \{Fun(X_\gamma, Y_{\gamma'}) : (\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma'\}$ с определенным выше отношением аппроксимации на них образуют развивающееся множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательства утверждения сводится к проверке трех условий определения развивающегося множества.

Для доказательства транзитивности отношения $\prec$ рассмотрим две пары функций, находящихся в отношении $\prec$: $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec f_{\gamma_2,\gamma_2'}$ и $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec f_{\gamma_3,\gamma_3'}$.

По определению 10 отношения $\prec$ на функциях, если выполняется отношение аппроксимации $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec f_{\gamma_3,\gamma_3'}$, то выполняется и отношение слабой аппроксимации $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec' f_{\gamma_3,\gamma_3'}$. А так как верно $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec f_{\gamma_2,\gamma_2'}$ и $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec' f_{\gamma_3,\gamma_3'}$, то по определению отношения $\prec$ должно выполняться отношение слабой аппроксимации $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec' f_{\gamma_3,\gamma_3'}$. Если теперь $f_{\gamma_4,\gamma_4'}$ – произвольная функция, для которой выполняется отношение слабой аппроксимации $f_{\gamma_3,\gamma_3'} \prec' f_{\gamma_4,\gamma_4'}$, то, так как имеется отношение аппроксимации $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec f_{\gamma_3,\gamma_3'}$, то отсюда по определению $\prec$ имеем выполнение отношения слабой аппроксимации $f_{\gamma_2,\gamma_2'} \prec' f_{\gamma_4,\gamma_4'}$. Отсюда, в свою очередь, и из отношения аппроксимации $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec f_{\gamma_2,\gamma_2'}$ следует, что $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec' f_{\gamma_4,\gamma_4'}$. Так как это отношение слабой аппроксимации выполняется для любой функции $f_{\gamma_4,\gamma_4'}$, слабо аппроксимирующей функцию $f_{\gamma_3,\gamma_3'}$, то, следовательно, выполняется определение 10, и $f_{\gamma_1,\gamma_1'} \prec f_{\gamma_3,\gamma_3'}$. То есть доказана транзитивность отношения аппроксимации на функциях.

Замечание. *Работа незавершена. Требуется еще проверка выполнения аксиом A2 и A3 для рассматриваемой в утверждении 7 последовательности множеств $Fun(X,Y)$ с отношением аппроксимации. Далее нужно исследовать построенную категорию конечно аппроксимируемых множеств в духе работы [3].*

Список литературы

[1] Бениаминов Е.М., Ефимова Е.А. Элементы универсальной алгебры и ее приложений в информатике. М.: Научный мир, 2004.

[2] Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Издательство: Издательство Новосибирского Университета, 2000.

[3] Scott D.S. (2001) A New Category for Semantics. In: Sgall J., Pultr A., Kolman P. (eds) Mathematical Foundations of Computer Science 2001. MFCS 2001. Lecture Notes in Computer Science, vol 2136. Springer, Berlin, Heidelberg.